

THESES

présentées

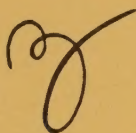
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR - INGENIEUR

par

Jacques VILAINE



1^{ère} THESE : Etude des vibrations forcées d'un système à un degré de liberté avec déplacement limité d'un seul côté.

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté.*

Soutenues le 29 juin 1967 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU	Président
M. RAVILLY	} Examineurs
M. LAMEAU	
M. OTTMANN	

THESES

présentées

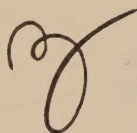
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR - INGENIEUR

par

Jacques VILAINÉ



1^{ère} THESE : Etude des vibrations forcées d'un système à un degré de liberté avec déplacement limité d'un seul côté.

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté.*

Soutenues le 29 juin 1967 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

Président

M. RAVILLY

M. LAMEAU

M. OTTMANN

}

Examineurs

FACULTE DES SCIENCES

	<i>Doyen</i>	M. BRILLOUET	
	<i>Assesseur</i>	M. GARRIGUES	
<i>Professeurs</i>		MM. BRILLOUET	<i>Sciences Mathématiques</i>
		MOLINARO	
		PAUC	
		PETRESCU	
		PIRONNEAU	
		RAFFIN	
		RAVILLY	
		VIVIER	
		AVIGNON	<i>Sciences physiques</i>
		BOULLLOUD	
		COLLET	
		MEZENECV	
		MINN	
		MOUTON	
		DUNOYER	<i>Sciences chimiques</i>
		GOBIN	
		GRAFF	
		QUINIOU	
		WOJTKOWIAK	
		M ^{lle} DEBRAUX	<i>Sciences biologiques</i>
		MM. DUPONT	
		GARRIGUES	
		PIERI	
		SELLIER	
		OTTMANN	<i>Sciences de la Terre</i>
<i>Maîtres de Conférences</i>		MM. JOLIVET A.	<i>Sciences Mathématiques</i>
		LAMEAU	
		IBISCH, M.C. associé	
		BARDON	<i>Sciences physiques</i>
		GOUREAUX	
		GRANGE	
		GUEVEL	
		LASKAR	
		M ^{lle} OFFRET	
		MM. SULMONT	
		JOLIVET J.	<i>Sciences chimiques</i>
		MARTIN	
		POINTEAU	
		ROUXEL	
		TOURNOUX	
		AMOURIQ	<i>Sciences biologiques</i>
		M ^{lle} ASTIE	
		M ^{me} LE DOUARIN	
		MM. LE DOUARIN	
		CAVET	<i>Sciences de la Terre</i>
		FORESTIER	
	<i>Secrétaire</i>	M. PAILLET	

A ma mère

A la mémoire de mon père

AVANT - PROPOS

Qu'il nous soit permis de dire notre profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'E.N.S.M., qui a été pour nous le guide précieux et bienveillant, dont les conseils éclairés ont conduit à l'aboutissement de cette tâche.

Nous lui exprimons toute notre gratitude d'avoir bien voulu assumer la présidence de cette thèse.

Nous présentons nos vifs remerciements à Messieurs les Professeurs RAVILLY, LAMEAU et OTTMANN, qui nous ont fait l'honneur d'être les Membres de notre jury.

Nous ne saurions oublier tous ceux qui, à des titres divers, nous ont apporté aide et encouragements, en ne ménageant ni leur temps, ni leur amitié agissante, en particulier, MM. DOSGHEAS, d'HERVE, Mmes ALUSSON et MEZENECV, ainsi que les assistants et le personnel du laboratoire de Mécanique des Sols et d'Essais des Matériaux.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

PRINCIPALES NOTATIONS

CHAPITRE 1 - ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME SANS AMORTISSEMENT

1 - 1 Hypothèses

1 - 2 Mise en équations

1 - 3 Conditions initiales

1 - 4 Résolution

1-4-1 Remarque fondamentale

1-4-2 Application des conditions initiales aux équations

1-4-3 Périodicité

1-4-4 Résolution

1 - 5 Conditions nécessaire et suffisante

1 - 6 Discussion de la solution suivant certaines valeurs des paramètres

1-6-1 Influence de n dans les résultats

1-6-2 Etude de $r = 1$

1-6-3 Etude de $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$ quand $\operatorname{tg} \psi$ tend vers zéro

1-6-4 Expression de $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$ pour $\operatorname{tg} \psi = \pm \infty$

1 - 7 Etude de quelques cas particuliers

1-7-1 $R = 1$

1-7-2 $R = 0$

1-7-3 $x_0 = 0$

1 - 8 Détermination du maximum de $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$

1 - 9 Quelques aspects du graphe $x = f(t)$

CHAPITRE 2 - ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT

2 - 1 Préliminaire

2 - 2 Mise en équations

2 - 3 Résolution

2-3-1 Conditions initiales

2-3-2 Remarque fondamentale

2-3-3 Conditions initiales appliquées à l'équation du déplacement

2-3-4 Conditions initiales appliquées à l'équation de la vitesse

2-3-5 Résolution

2-3-6 Vérification

2 - 4 Quelques valeurs particulières

2-4-1 Expression de $\frac{x^I(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ pour $r = 1$

2-4-2 $\frac{x^I(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ quand $\operatorname{tg} \psi = \pm \infty$

2-4-3 Tangente ψ n'est jamais nulle

CHAPITRE 3- VALEURS NUMERIQUES ET GRAPHES THEORIQUES

3 - 1 Introduction

3 - 2 Réalisation approchée de la condition suffisante

3 - 3 Valeurs numériques et graphes du système sans amortissement

3-3-1 Valeurs numériques des paramètres

3-3-2 Organigramme

3-3-3 Présentation des résultats

3-3-4 Analyse des résultats - Conclusions

3 - 4 Influence de l'amortissement

3-4-1 Valeurs numériques des paramètres

3-4-2 Programme de calculs

3-4-3 Résultats

3-4-4 Conclusion

CHAPITRE 4 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

4 - 1 But

4 - 2 Dispositif expérimental

4-2-1 Montage mécanique

4-2-2 Circuit d'excitation

4-2-3 Circuit de vitesse

4-2-4 Circuit intégrateur

4 - 3 Vérification des hypothèses

4-3-1 Le système vibrant n'est pas amorti

4-3-2 Le ressort de raideur k est parfaitement linéaire et de masse négligeable

4-3-3 La percussion est instantanée

4-3-4 La force sinusoïdale est appliquée sur l'axe passant par le centre de gravité de la masse m et le point de percussion

4-3-5 Le mouvement du percuteur est continu

4 - 4 Réglages et mesures

4-4-1 Mesure du déplacement x du percuteur

4-4-2 Mesure de la pulsation propre du système

4-4-3 Mesure du coefficient d'amortissement μ

4-4-4 Réglage de r

4-4-5 Réglage de $\frac{x_0}{d}$

4-4-6 Mesure de la vitesse de percussion $x'(t^*)$

4-4-7 Mesure de N

4-4-8 Mesure du coefficient de restitution de vitesse R

CHAPITRE 5 • RESULTATS EXPERIMENTAUX ET CYCLES LIMITES

5-1 Généralités

5-2 Présentation et analyse des résultats

5-2-1 Plage d'accrochage automatique

5-2-2 Tableau général des résultats

5-2-3 Observations

5-2-4 Photographies

5-2-5 Diagrammes

5-3 Conclusion

5-4 Cycles limites

5-4-1 Généralités

5-4-2 Réalisation des cycles limites

5-4-3 Résultats

■ CONCLUSION

■ ANNEXE : Application des résultats théoriques à un vibrofonneur possédant un seul degré de liberté .

■ Bibliographie

:
÷ ÷
:

INTRODUCTION

Les vibrations forcées de systèmes mécaniques à un ou deux degrés de liberté, avec déplacement limité d'un seul côté, sont utilisées fréquemment en construction civile, notamment pour le battage des pieux et palplanches.

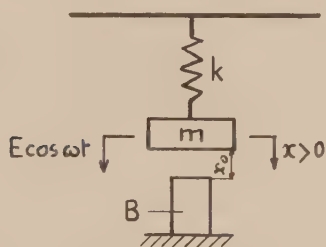
Communément dénommés « vibrofonceurs » ou « vibromarteaux », ces systèmes ont fait l'objet de recherches, en particulier, en U.R.S.S. Certains auteurs : O. POPOVITCH , P.C. LIFSCHITZ, S.A. TSAPLIN, O. Ia SHEKHTER , I.K. PTCHELIN et D.D. BARKAN ont développé la théorie de tels systèmes, supposés non amortis, à partir d'une hypothèse : « Entre deux percussions successives, le vibreur est le siège d'un mouvement forcé, périodique et stable, dont la période est un multiple de celle de la force dynamique », puis ils ont défini des zones de stabilité en fonction d'un « interstice réduit ».

Dans l'étude entreprise, nous avons voulu mettre en évidence, d'une part, que l'hypothèse des auteurs soviétiques résulte de la continuité du mouvement et que, d'autre part, la vitesse de percussion se déduit directement de « l'interstice réel » et de l'amplitude de la force sinusoïdale appliquée au système vibrant.

Nous avons recherché principalement les variations de la vitesse de percussion en fonction de la pulsation de l'excitation suivant les valeurs de certains paramètres importants, tel que l'interstice réel par exemple.

Nous avons établi, tout d'abord, la théorie d'un système à un degré de liberté non amorti puis, ensuite, celle avec amortissement. Un dispositif expérimental a permis de confronter les résultats théoriques et expérimentaux.

Le principe d'un système à un degré de liberté, avec déplacement limité d'un seul côté, est le suivant :



Un percuteur de masse m , solidaire de l'extrémité libre d'un ressort de raideur k , est soumis à une force sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude E .

Une butée fixe B est placée à la distance x_0 - mesurée au repos - du percuteur. (x_0 représente l'interstice réel).

Pour certaines valeurs de E et ω , le déplacement du percuteur atteint la valeur x_0 ; il se produit alors une percussion.

Notre étude consiste à rechercher les lois régissant ce phénomène, en nous limitant, cependant, aux mouvements périodiques et réguliers. (Par « mouvements réguliers » nous exprimons que toutes les percussions sont identiques).

PRINCIPALES NOTATIONS

m : masse totale en mouvement

k : raideur du ressort

b : terme d'amortissement

E : amplitude de la force appliquée

x : déplacement de la masse : l'origine étant prise au repos, les x positifs correspondant aux élongations du ressort

x_0 : distance, au repos, du percuteur à la butée

$x' = \frac{dx}{dt}$: vitesse de la masse

$x'_0 = x'(\tau^+)$: vitesse du percuteur immédiatement après percussion

$x'(\tau^-)$: vitesse de percussion (immédiatement avant percussion)

$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$: accélération

$\frac{x_0}{d} = \frac{k x_0}{E}$: coefficient sans dimension

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre du système

ω : pulsation d'excitation

$r = \frac{\omega}{\omega_0}$: rapport sans dimension

t : temps

$t = 0$: origine des temps prise immédiatement après une percussion

$t = \tau$: temps entre deux percussions consécutives

φ : déphasage de l'excitation par rapport à l'origine des temps

ψ : déphasage du terme des oscillations libres, par rapport à l'origine des temps

$\mu = \frac{b}{2m\omega_0}$: coefficient d'amortissement

R : coefficient de restitution de vitesse $= \left| \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)} \right|$

N : nombre entier de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives

:
:
:

CHAPITRE 1

ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME SANS AMORTISSEMENT

Nous nous proposons de rechercher l'expression de la vitesse de percussion $\dot{x}(\tau)$ en fonction des paramètres du système.

La connaissance d'une telle expression entraîne immédiatement la détermination :

- des valeurs des paramètres pour obtenir une vitesse de percussion optimum
- de l'énergie absorbée par la percussion .

1-1 Hypothèses

Précisons les hypothèses qui définissent les limites de validité de l'étude entreprise .

- 1.1.1- Le système vibrant n'est pas amorti.
- 1.1.2- Le ressort de raideur k est parfaitement linéaire et de masse négligeable .
- 1.1.3 - La percussion est instantanée.
- 1.1.4 - La force sinusoïdale, d'amplitude E , est appliquée sur l'axe passant par le centre de gravité de la masse m et le point de percussion.
- 1.1.5 - Le mouvement du percuteur est continu .

1-2 Mise en équations

Désignons par :

- m : la masse en mouvement
- k : la raideur du ressort
- E : l'amplitude de la force appliquée
- x : le déplacement de la masse : l'origine étant prise au repos, les x positifs correspondant aux élongations du ressort
- x_0 : la distance, au repos, du percuteur à la butée
- t : le temps
- τ : la période du phénomène

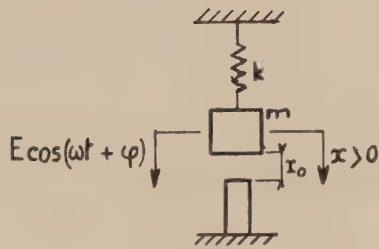


fig. 1-1

$$x' = \frac{dx}{dt} : \text{la vitesse de la masse}$$

$$x'' = \frac{d^2 x}{dt^2} : \text{l'accélération de la masse}$$

$$\omega : \text{la pulsation d'excitation}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{la pulsation propre du système}$$

Avec ces notations, l'équation différentielle régissant le phénomène s'écrit :

$$mx'' + kx = E \cos(\omega t + \varphi)$$

Les solutions sont de la forme :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{\bar{E}}{k - m \omega^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Posons

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad d = \frac{E}{k}$$

il vient :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{d}{1 - r^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad [1-2-1]$$

$$x' = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi) - \frac{d \omega}{1 - r^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad [1-2-2]$$

1-3 Conditions initiales

Choisissons comme origine des temps l'instant d'une percussion. Le mouvement étant périodique, de période τ , adoptons comme notations :

$t=0$ immédiatement après la 1^{ère} percussion

$t=\tau^-$ « avant la 2^{ème} «

$t=\tau^+$ « après la 2^{ème} «

$t=p\tau^-$ immédiatement avant la $(p+1)$ ^{ième} percussion

$t=p\tau^+$ « après la « «

avec p entier quelconque

Les conditions initiales s'expriment alors :

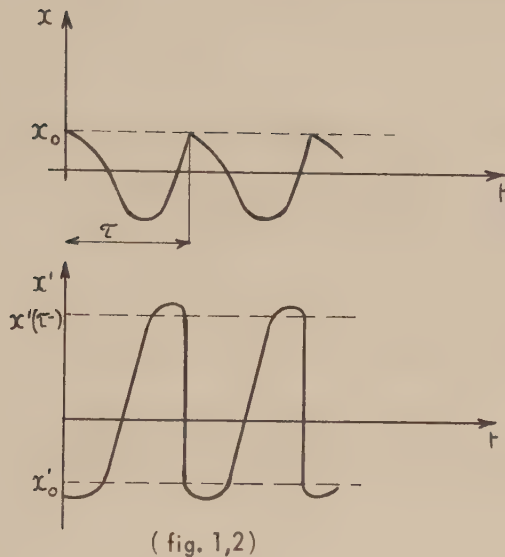
$$x_0 = x(\tau^-) = x(\tau^+) = \dots = x(p\tau^-) = x(p\tau^+)$$

$$x'_0 = x'(\tau^-) = \dots = x'(p\tau^+)$$

$$x'(\tau^-) = \dots = x'(p\tau^-)$$

1.4 Résolution

1.4.1 Remarque fondamentale



La percussion provoque une discontinuité de vitesse de la masse m : la dérivée de l'équation du mouvement, par rapport au temps, passe instantanément de la valeur $x'(\tau^-)$ - notée positive - à la valeur x'_0 - notée négative - fig. 1,2

L'excitation est sinusoïdale et continue et, par suite, à dérivées continues. La discontinuité ne peut donc se produire que sur le terme relatif aux oscillations libres de l'équation de la vitesse :

$$A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi) \quad \text{pour } t = \tau, 2\tau, \dots, p\tau, \dots$$

Les percussions étant identiques entre elles, l'amplitude A des oscillations libres est une constante quel que soit t .

Ainsi, la seule variation instantanée possible ne peut provenir que du terme ψ , à chaque percussion.

1.4.2 Application des conditions initiales aux équations

En tenant compte de la remarque précédente, les équations [1-2-1] et [1-2-2] deviennent pour $t=0$, $t=\tau^-$, $t=\tau^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=0 \quad x_0 = A \cos \psi + \frac{d}{1-r^2} \cos \varphi \end{array} \right. \quad [1-4-2-1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=\tau^- \quad x_0 = A \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega \tau + \varphi) \end{array} \right. \quad [1-4-2-2]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=\tau^+ \quad x_0 = A \cos(\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega \tau + \varphi) \end{array} \right. \quad [1-4-2-3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=0 \quad x'_0 = -\omega_0 A \sin \psi - \frac{d \omega}{1-r^2} \sin \varphi \end{array} \right. \quad [1-4-2-4]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=\tau^- \quad x'(\tau^-) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \tau + \psi) - \frac{d \omega}{1-r^2} \sin(\omega \tau + \varphi) \end{array} \right. \quad [1-4-2-5]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=\tau^+ \quad x'(\tau^+) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi) - \frac{d \omega}{1-r^2} \sin(\omega \tau + \varphi) \end{array} \right. \quad [1-4-2-6]$$

avec $x'_0 = x'(\tau^+)$ car les percussions sont régulières.

De [1-4-2-2] et [1-4-2-3] nous déduisons :

$$\cos (\omega_0 \tau + \psi) = \cos (\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi)$$

d'où :

$$\sin (\omega_0 \tau + \psi) = \pm \sin (\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi)$$

La discontinuité de vitesse entraîne la détermination — pour le signe de $\sin (\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi)$

En reportant la valeur de $\sin (\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi)$ dans [1-4-2-6] puis en retranchant membre à membre, respectivement, les relations [1-4-2-1], [1-4-2-2] et [1-4-2-4], [1-4-2-6], nous obtenons le système d'équation suivant, après avoir remplacé ω par $r \omega_0$.

$$\begin{cases} A [\cos \psi - \cos (\omega_0 \tau + \psi)] + \frac{d}{1-r^2} [\cos \varphi - \cos (r \omega_0 \tau + \varphi)] = 0 \\ A [\sin \psi + \sin (\omega_0 \tau + \psi)] + \frac{dr}{1-r^2} [\sin \varphi - \sin (r \omega_0 \tau + \varphi)] = 0 \end{cases}$$

Ce système doit être soluble quel que soit r (en supposant que les percussions existent; dans le cas contraire, la mise en équation pour un régime permanent n'est plus valable : les termes relatifs aux oscillations libres étant nuls), ce qui implique :

$$\text{d'une part} \quad \begin{cases} \cos \psi = \cos (\omega_0 \tau + \psi) \\ \sin \psi = -\sin (\omega_0 \tau + \psi) \end{cases} \quad [1-4-2-7]$$

$$\text{d'autre part} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \cos (\omega \tau + \varphi) \\ \sin \varphi = \sin (\omega \tau + \varphi) \end{cases} \quad [1-4-2-8]$$

La relation [1-4-2-7] peut s'exprimer sur un cercle de rayon A .

La valeur $\Delta \psi$ du déphasage instantané s'en déduit aisément

$$\Delta \psi = 2 \psi \quad \text{à } 2 n \pi \text{ près}$$

d'où :

$$\boxed{\omega_0 \tau + 2 \psi = 2 n \pi} \quad [1-4-2-9]$$

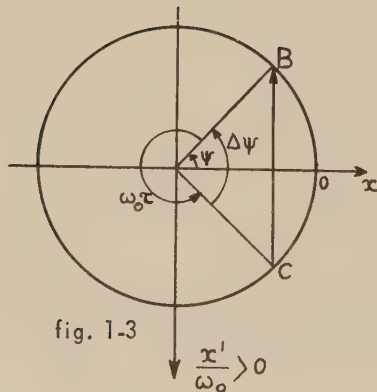
n nombre entier

La relation [1-4-2-8] entraîne :

$$\boxed{\omega \tau = 2 N \pi} \quad [1-4-2-10]$$

N nombre entier

ce qui peut s'exprimer :



« Le nombre de cycles décrits par l'excitation entre 2 percussions consécutives est un entier »

De [1-4-2-10] nous tirons $\tau = \frac{2N\pi}{\omega}$ et, par suite, avec $r = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 \tau = \frac{2N\pi}{r}$

En remplaçant dans [1-4-2-9]

$$\boxed{\psi = \pi \left(n - \frac{N}{r} \right)} \quad [1-4-2-11]$$

1.4.3 Périodicité

La périodicité exprime qu'aux instants $t=t_1$, $t=t_1+\tau$, $t=t_1+2\tau$, ..., $t=t_1+p\tau$, les positions et les vitesses du percuteur sont respectivement identiques, quels que soient t_1 et p (entier).

En tenant compte, à chaque percussion, du déphasage instantané égal à 2ψ , l'équation du mouvement périodique et régulier s'écrit pour $p=1, 2$ etc...

$$t=t_1 \quad x = x_1 = A \cos (\omega_0 t_1 + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos (\omega t_1 + \varphi)$$

$$t=t_1+\tau \quad x = x_1 = A \cos (\omega_0 t_1 + \psi + 2\psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos (\omega t_1 + \varphi)$$

et ainsi de suite ...

Par récurrence, nous obtenons :

$$\underline{x = A \cos [\omega_0 t + (1+2p)\psi] + \frac{d}{1-r^2} \cos (\omega t + \varphi)} \quad [1-4-3-1]$$

L'expression de la vitesse est alors :

$$\underline{x' = -A \omega_0 \sin [\omega_0 t + (1+2p)\psi] - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin (\omega t + \varphi)} \quad [1-4-3-2]$$

1.4.4 Résolution

1.4.4.1. Coefficient de restitution de vitesse

Les relations [1-4-2-4] et [1-4-2-5] s'écrivent maintenant :

$$x'_0 = -\omega_0 A \sin \psi - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin \varphi \quad [1-4-4-1]$$

$$x'(\tau^+) = \omega_0 A \sin \psi - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin \varphi \quad [1-4-4-2]$$

Définissons comme « coefficient de restitution de vitesse R » le quotient des valeurs absolues des vitesses du percuteur, respectivement après et avant percussion :

$$R = \left| \frac{x'_0}{x'(\tau^+)} \right| = \left| \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)} \right|$$

ou, en tenant compte des signes :

$$x'_0 = -R x'(\tau^-) \quad [1-4-4-3]$$

Physiquement, R reste compris entre 0 et 1.

en résolvant entre [1-4-4-1], [1-4-4-2] et [1-4-4-3], il vient :

$$\sin \varphi = -\frac{(1-R)}{(1+R)} \frac{1-r^2}{d} \frac{1}{r} A \sin \psi \quad [1-4-4-4]$$

1.4.4.2. Résolution

Nous désirons déterminer ψ , φ , A, qui sont les inconnues des équations [1-4-3-1] et [1-4-3-2] et exprimer la vitesse de percussion $x'(\tau^-)$ en fonction des paramètres connus : x_0 , d , r , R , N , n .

Pour cela, nous disposons du système d'équations suivant :

$$\psi = \pi(n - \frac{N}{2}) \quad [1-4-2-11]$$

$$\sin \varphi = -\frac{(1-R)}{(1+R)} \frac{1-r^2}{d} \frac{1}{r} A \sin \psi \quad [1-4-4-4]$$

$$A \cos \psi = x_0 - \frac{d}{1-r^2} \cos \varphi \quad [1-4-2-1]$$

$$A \sin \psi = \frac{1}{\omega_0} [x'(\tau^-) + \frac{d \omega}{1-r^2} \sin \varphi] \quad [1-4-4-2]$$

Remplaçons dans [1-4-4-2] $\sin \varphi$ par sa valeur ; il vient :

$$A \sin \psi = \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0} \frac{1+R}{2} \quad [1-4-4-5]$$

et en reportant dans [1-4-4-4]

$$\frac{d}{1-r^2} \sin \varphi = -\frac{(1-R)}{2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega} \quad [1-4-4-6]$$

Le rapport de [1-4-4-5] sur [1-4-2-1] entraîne :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0} \frac{1+R}{2}}{x_0 - \frac{d}{1-r^2} \cos \varphi}$$

Or $\alpha \cos \varphi = \varepsilon \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}$ avec $\alpha = \frac{d}{1-r^2}$ et $\varepsilon = \pm 1$, d'où, en remplaçant $\alpha \sin \varphi$ par sa valeur [1-4-4-6]

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0} \frac{1+R}{2}}{x_0 - \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d}{1-r^2}\right)^2 - \left(\frac{1-R}{2}\right)^2 \frac{x'^2(\tau^-)}{\omega^2}}}$$

soit encore :

$$x_0 \operatorname{tg} \psi - \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0} \frac{1+R}{2} = \varepsilon \operatorname{tg} \psi \sqrt{\left(\frac{d}{1-r^2}\right)^2 - \left(\frac{1-R}{2}\right)^2 \frac{x'(\tau^*)^2}{\omega^2}}$$

puis en élevant au carré

$$x'(\tau^*)^2 \left[\left(\frac{1+R}{2\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1-R}{2\omega}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - 2x'(\tau^*) \left[x_0 \frac{1+R}{2\omega_0} \operatorname{tg} \psi \right] + x_0^2 \operatorname{tg}^2 \psi - \left(\frac{d}{1-r^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi = 0$$

équation du second degré en $x'(\tau^*)$ dont le discriminant s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \left[\frac{1+R}{2\omega_0} x_0 \operatorname{tg} \psi \right]^2 - \left[\left(\frac{1+R}{2\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1-R}{2\omega}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] \left[x_0^2 \operatorname{tg}^2 \psi - \left(\frac{d}{1-r^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] \\ &= \left[\left(\frac{1+R}{2\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1-R}{2\omega}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] \left[\left(\frac{d}{1-r^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - \left(\frac{1-R}{2\omega}\right)^2 x_0^2 \operatorname{tg}^4 \psi \end{aligned}$$

La solution est alors :

$$x'(\tau^*) = \frac{\frac{4 \operatorname{tg} \psi}{\omega_0} \left[\frac{1+R}{2} x_0 + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d}{1-r^2}\right)^2 \left[\left(\frac{1+R}{2}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-R}{2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-R}{2}\right)^2 x_0^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \right]}{\frac{1}{\omega^2} \left[(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right]}$$

relation qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{2 \operatorname{tg} \psi \left[1+R + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\frac{d}{x_0}}{1-r^2}\right)^2 \left[(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \right]}{(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \quad [1-4-4-7]$$

De l'expression [1-4-4-5] nous tirons :

$$\left[\frac{A}{x_0} = \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi} \right] \quad [1-4-4-8]$$

et de [1-4-4-6] ;

$$\left[\sin \varphi = - \frac{(1-R)}{2} \frac{x_0}{d} \frac{1-r^2}{r} \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \right] \quad [1-4-4-9]$$

Ces relations définissent partiellement la solution du problème étudié .

Elles sont présentées sous la forme de rapport sans dimension ($\omega_0 x_0$ a la dimension d'une vitesse et x_0 celle d'une longueur)

REMARQUE : Pour qu'il existe une solution, il faut :

- d'une part que l'expression sous le radical soit positive ou nulle ,
- d'autre part, que $x'(\tau^*)$ soit positive .

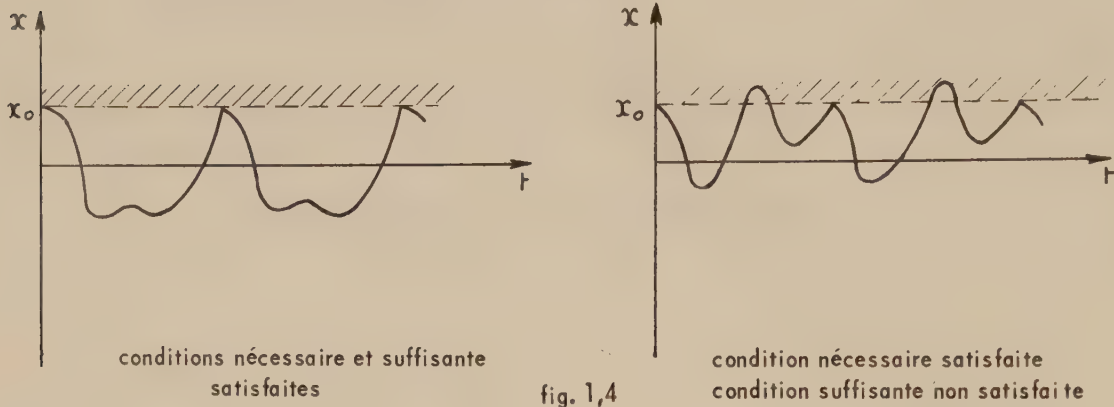
1.5 Conditions nécessaire et suffisante

Les conditions initiales expriment la régularité et la périodicité des percussions, ce qui satisfait à la condition nécessaire.

La condition suffisante est telle que le déplacement du percuteur ne peut être supérieur à la distance x_0 entre deux percussions consécutives ;

$$x < x_0 \quad \text{pour} \quad p\tau < t < (p+1)\tau \quad \forall p \text{ entier} \quad [1-5-1]$$

La figure [1-4] illustre ces conditions



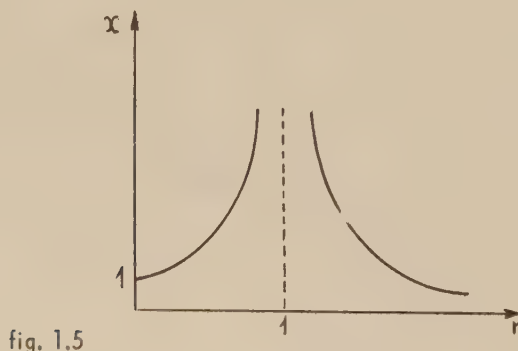
1.6 Discussion de la solution suivant certaines valeurs des paramètres

1.6.1 Influence de n dans les résultats

Dans l'expression de $\frac{x'(\tau)}{\omega_0 x_0}$, l'angle ψ n'intervient que par sa tangente.

Quel que soit n : $\text{tg } \psi = \text{tg } \pi(n - \frac{N}{r}) = \text{tg } \pi(1 - \frac{N}{r})$ ce qui nous autorise à prendre $n=1$ dans les calculs.

1-6-2 Etude de $r=1$



Un système vibrant à un degré de liberté, soumis à une excitation de fréquence identique à sa fréquence propre, entre en résonance. Si le système n'est pas amorti, les déplacements et vitesses deviennent infinis (fig. 1.5).

Par contre, pour le système étudié, avec déplacement limité d'un seul côté, les vitesses avant et après percussions restent finies quand r tend vers l'unité par valeurs supérieures ou inférieures.

En effet, pour les valeurs de r voisines de l'unité, nous pouvons opérer un développement limité de $\operatorname{tg} \psi$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \pi \left(n - \frac{N}{r} \right) \simeq \pi \left(1 - \frac{1}{r} \right)$$

(n étant indéterminé, il suffit de prendre $n = N$)

et en remplaçant $\operatorname{tg} \psi$ par sa valeur dans la relation [1-4-4-7], puis en faisant $r=1$, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{\varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{\pi}{2}}{1+R}} \quad [1-6-2-1]$$

$x'(\tau^*)$ étant toujours positive, nous en déduisons :

$$\varepsilon = 1 \quad \text{pour } x_0 > 0$$

$$\varepsilon = -1 \quad \text{« } x_0 < 0$$

Remarquons que l'expression établie est indépendante de $\operatorname{tg} \psi$ et, par suite, N , ce qui signifie que :

« Le nombre de cycles de l'excitation entre deux percussions consécutives est indéterminé quand la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre du système vibrant ».

1.6.3 Etude de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ quand $\operatorname{tg} \psi$ tend vers zéro

$$1.6.3.1 \quad r = 1 \quad \operatorname{tg} \psi = 0 \quad \text{voir relation [1-6-2-1]}$$

$$1.6.3.2 \quad r \neq 1 \quad \operatorname{tg} \psi = 0$$

$$\text{dans ce cas } \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = 0$$

1.6.3.3 Supposons la valeur de $\operatorname{tg} \psi$ suffisamment faible pour que $\operatorname{tg}^2 \psi$ soit négligeable. Il vient alors :

$$\boxed{\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{2 \operatorname{tg} \psi \left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right]}{1+R}} \quad [1-6-3-1]$$

Cette relation nous permettra, ultérieurement, une interprétation plus aisée des graphes représentatifs de la fonction $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ car, à un coefficient multiplicatif près $\left(\frac{2}{1+R} \right)$, [1-6-3-1] est l'expression obtenue pour $R=1$ (cf 1.7.1).

1.6.4 Expression de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ pour $\operatorname{tg} \psi = \pm \infty$

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{+2 r \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d}{x_0}\right)^2 \frac{1}{(1-r^2)^2} - 1}}{1-R} \quad [1.6.4.1]$$

relation valable pour $R < 1$

1.7 Etude de quelques cas particuliers

1.7.1 $R = 1$

Pour une valeur unité du coefficient de restitution de vitesse R - ce qui traduit que les vitesses avant et après percussioin sont égales et opposées - nous obtenons :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \operatorname{tg} \psi \left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right] \quad [1.7.1.1]$$

Le signe de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ dépend du produit des signes de $\operatorname{tg} \psi$ et de l'expression entre crochets .

1.7.1.1. Etude du signe de $\left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right]$

$d = \frac{E}{k}$ est positif par définition

• $r < 1$

$$\frac{\varepsilon}{x_0} > 0 \quad \left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right] \text{ est toujours positive}$$

$$\frac{\varepsilon}{x_0} < 0 \quad \left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right] \text{ est positive si } \frac{\varepsilon d}{x_0} > r^2 - 1$$

• $r > 1$

$$\frac{\varepsilon}{x_0} < 0 \quad \left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right] \text{ est toujours positive}$$

$$\frac{\varepsilon}{x_0} > 0 \quad \left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right] \text{ est positive si } \frac{\varepsilon d}{x_0} < r^2 - 1$$

L'expression $\left[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2} \right]$ est négative pour les valeurs complémentaires et nulle pour $r = r_0$

tel que :

$$r_0 = \sqrt{1 + \varepsilon \frac{d}{x_0}}$$

1.7.1.2 Représentation graphique

Représentons sur un graphique (fig. 1-6) le signe de $[1 + \varepsilon \frac{d}{x_0} \frac{1}{1-r^2}]$ suivant les valeurs de r et de $\varepsilon \frac{d}{x_0}$

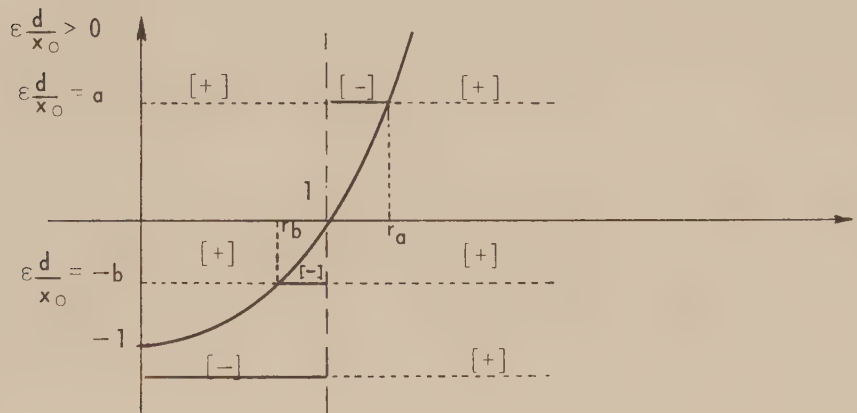


fig. 1,6

1.7.1.3 Tableau de discussion des solutions possibles

Dressons le tableau des solutions possibles de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ suivant le signe de $\operatorname{tg} \psi$ et les variations de $\varepsilon \frac{d}{x_0}$, en se rappelant que $x'(\tau^*)$ est positif, ce qui implique :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} > 0 \quad \text{si } x_0 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} < 0 \quad \text{si } x_0 < 0$$

Remarquons que pour une même valeur de r , il peut exister deux solutions distinctes ou confondues dans certains cas :

par exemple si $\frac{d}{x_0} = a$ avec $x_0 > 0$, $a > 0$ et $\operatorname{tg} \psi > 0$, il existe deux valeurs de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ pour $r \geq r_a$.

$\text{tg } \psi$	r	$\frac{\varepsilon}{x_0}$	$\varepsilon \frac{d}{x_0}$	$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$	La condition nécessaire est satisfaite si :
> 0	$r < 1$	> 0	> 0	> 0	$x_0 > 0$
> 0	$r < r_b < 1$	< 0	> -1 < 0	> 0	"
> 0	$r_b < r < 1$	< 0	> -1 < 0	< 0	$x_0 < 0$
> 0	$r < 1$	< 0	< -1	< 0	"
< 0	$r < 1$	> 0	> 0	< 0	$x_0 < 0$
< 0	$r < r_b < 1$	< 0	> -1 < 0	< 0	"
< 0	$r_b < r < 1$	< 0	> -1 < 0	> 0	$x_0 > 0$
< 0	$r < 1$	< 0	> 0	> 0	"
> 0	$r > 1$	< 0	< 0	> 0	"
> 0	$r > r_a > 1$	> 0	> 0	> 0	"
> 0	$r_a > r > 1$	> 0	> 0	< 0	$x_0 < 0$
< 0	$r > 1$	< 0	< 0	< 0	"
< 0	$r > r_a > 1$	> 0	> 0	< 0	"
< 0	$r_a > r > 1$	> 0	> 0	> 0	$x_0 > 0$

1.7.2 $R = 0$

R nul signifie que toute l'énergie de la percussion est intégralement transmise à la butée, sans aucune restitution de la part de celle-ci. La vitesse après percussion est nulle.

L'expression générale de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ devient :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{2 \text{tg } \psi \left[1 + \varepsilon \sqrt{\frac{(d/x_0)^2}{(1-r^2)^2} \left[1 + \frac{\text{tg}^2 \psi}{r^2} \right]} - \frac{\text{tg}^2 \psi}{r^2} \right]}{1 + \frac{\text{tg}^2 \psi}{r^2}} \quad [1.7.2.1]$$

1.7.3 $x_0 = 0$

Au repos, le percuteur est au contact de la butée, le ressort k n'étant ni comprimé, ni tendu.

Pour cette valeur particulière de x_0 , il n'est plus possible d'exprimer la solution sous la forme $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ $x'(\tau^*)$ restant en général fini.

Nous obtenons :

$$x'(\tau^*) = \frac{2 \omega_0 \text{tg } \psi \varepsilon \sqrt{\frac{(d/x_0)^2}{(1-r^2)^2} [(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \text{tg}^2 \psi]}}{(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \text{tg}^2 \psi} \quad [1.7.3.1]$$

1.8 Détermination du maximum de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$

Coordonnées du point de décrochement

Pour R , d , x_0 et N fixés, le maximum de l'expression $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ [1-4-4-7] sera obtenu pour la valeur de r annulant la dérivée, par rapport à r , de cette expression.

Posons :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = 2 \operatorname{tg} \psi \frac{M}{D}$$

avec :

$$M = (1+R) + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d}{x_0}\right)^2 \left[(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi}$$

$$D = (1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi$$

Dérivons par rapport à r :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \right] = \frac{2 \left[(1+\operatorname{tg}^2 \psi) \frac{\pi N}{r^2} M D + \operatorname{tg} \psi \frac{dM}{dr} D - \operatorname{tg} \psi M \frac{dD}{dr} \right]}{D^2} \quad [1-8-1]$$

où

$$\frac{dD}{dr} = 2 (1-R)^2 \left[\frac{\pi N}{r^4} (1+\operatorname{tg}^2 \psi) \operatorname{tg} \psi - \frac{1}{r^3} \operatorname{tg}^2 \psi \right]$$

$$\frac{dM}{dr} = \frac{\varepsilon \left\{ \left[\left(\frac{d}{x_0} \right)^2 \frac{1}{(1-r^2)^2} - 1 \right] (1-R)^2 \left[\frac{2\pi N}{r^4} \operatorname{tg} \psi (1+\operatorname{tg}^2 \psi) - \frac{2}{r^3} \operatorname{tg}^2 \psi \right] \right\}}{2A}$$

$$+ \frac{\varepsilon \left\{ \left(\frac{d}{x_0} \right)^2 \frac{4r}{(1-r^2)^3} \left[(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] \right\}}{2A}$$

Désignons par :

$$A = \sqrt{\left(\frac{d}{x_0}\right)^2 \left[(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi}$$

$$B = (1+\operatorname{tg}^2 \psi) \frac{\pi N}{r} M = (1+\operatorname{tg}^2 \psi) \frac{\pi N}{r} [(1+R) + \varepsilon A]$$

$$C = \operatorname{tg} \psi \times \text{numérateur de } \frac{dM}{dr}$$

$$D = (\text{voir ci-dessus})$$

$$E = \operatorname{tg} \psi M \frac{dD}{dr} = 2 \operatorname{tg} \psi [(1+R) + \varepsilon A] (1-R)^2 \left[\frac{\pi N}{r^4} (1+\operatorname{tg}^2 \psi) \operatorname{tg} \psi - \frac{1}{r^3} \operatorname{tg}^2 \psi \right]$$

et, en remplaçant dans [1-8-1] :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \right] = \frac{2 \left[BD + \frac{CD}{2A} - E \right]}{D^2}$$

soit :

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \right] = \frac{2A BD + CD - 2AE}{D^2 A}} \quad [1-8-2]$$

$$\text{Maximum de } \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$$

Pour un système donné et x_0 fixé, ce maximum est proportionnel à la vitesse de percussion $x'(\tau^*)$. Il est déterminé par la valeur $r=r_m$ annulant le numérateur de [1-8-2].

Coordonnées du point de décrochement

Au chapitre 3, le traitement numérique de l'expression $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ montrera que pour r supérieur à l'unité, la fonction $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ - quand elle existe - croît avec r puis passe par un maximum pour $r=r_m$ avant de décroître légèrement (cf fig. 1.7).

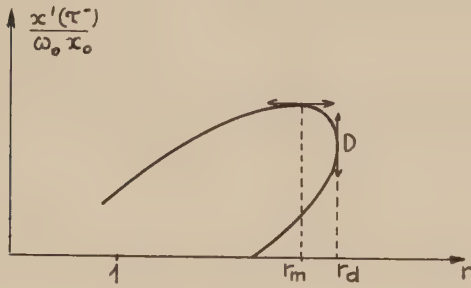


fig. 1-7

Nous définirons comme « point de décrochement » le point D du graphe de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = f(r)$, d'abscisse $r=r_d$, tel

que, pour $N, R, \frac{x_0}{d}$ fixés, $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ possède une valeur double.

La dérivée, par rapport à r , de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$

devient infinie pour $r=r_d$, soit

$$D^2 A = 0 \quad \text{d'après [1-8-2]}$$

Or, D étant la somme de deux carrés, seul le terme A peut s'annuler.

Par suite, l'abscisse r_d du point de décrochement vérifie la relation :

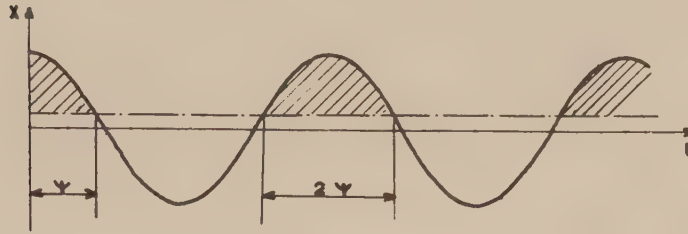
$$\frac{\left(\frac{d}{x_0}\right)^2}{(1-r_d^2)^2} \left[(1+R)^2 + \frac{1}{r_d^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi_d \right] - \frac{1}{r_d^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi_d = 0 \quad [1-8-3]$$

$$\text{avec} \quad \psi_d = \pi \left(1 - \frac{N}{r_d} \right)$$

1.9 Quelques aspects du graphe $x = f(t)$

Le déplacement du percuteur, pour le phénomène périodique et régulier étudié, est superposition de deux termes :

- ▲ le premier correspondant aux oscillations libres du système et subissant un déphasage instantané à chaque percussion (cf. fig. 1.8)



aspect du déphasage

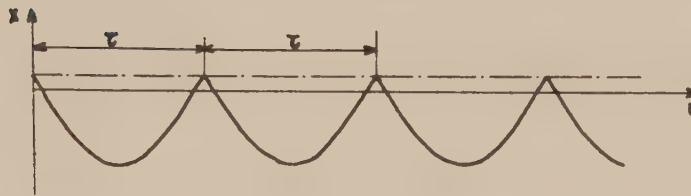


fig. 1.8

mouvement réel

- ▲ le deuxième correspond aux oscillations forcées (cf. fig. 1.9)

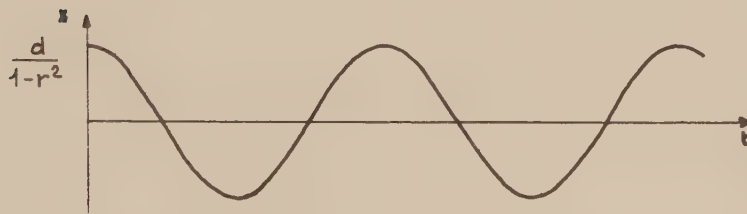
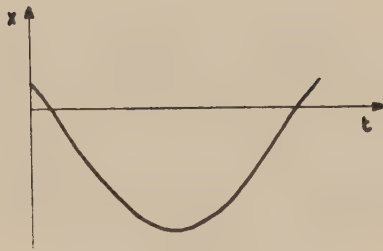


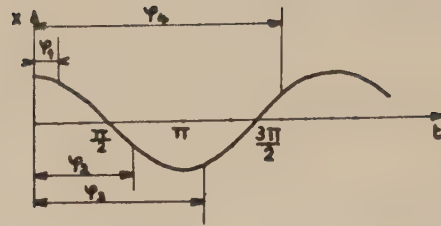
fig. 1.9

La représentation graphique du déplacement du percuteur illustre d'une façon intéressante l'exposé analytique des paragraphes précédents.

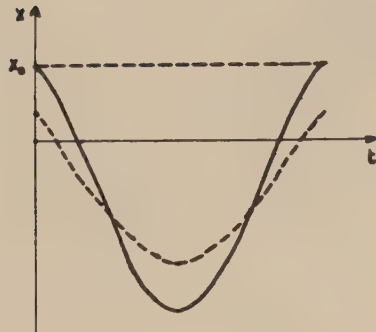
Nous prendrons, pour cette illustration, ψ légèrement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et $N = 1$ (un cycle de l'excitation entre deux percussions consécutives) et ferons varier φ de 0 à 2π .



oscillation libre



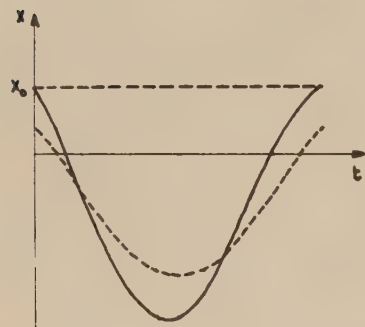
oscillations forcées



$$\varphi = 0$$

x_0 est toujours positif

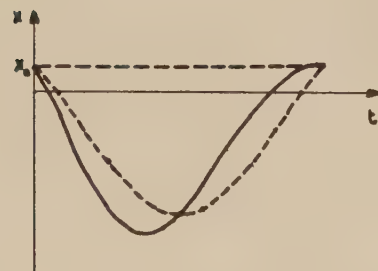
R est unitaire



$$\varphi = \varphi_1$$

x_0 est toujours positif

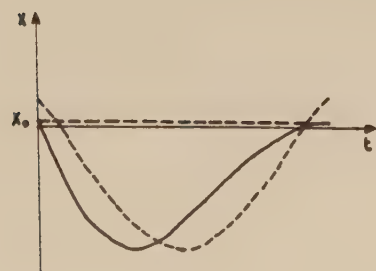
R est supérieur à l'unité, ce qui est impossible physiquement.



$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

x_0 est toujours positif

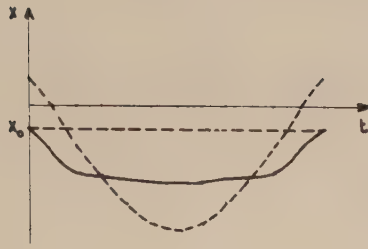
R est supérieur à l'unité
cas impossible



$$\varphi = \varphi_2$$

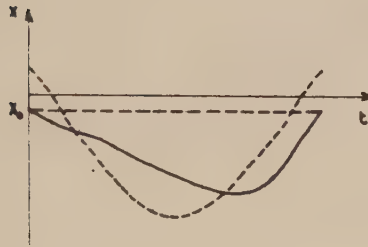
x_0 peut être négatif

R est supérieur à l'unité :
impossible



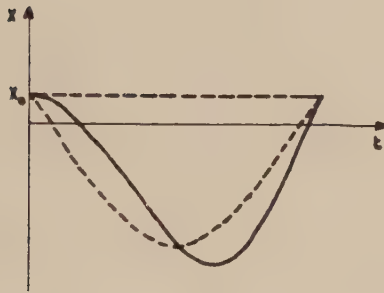
$$\varphi = \pi$$

x_0 peut être négatif (cas de la figure)
R est unitaire



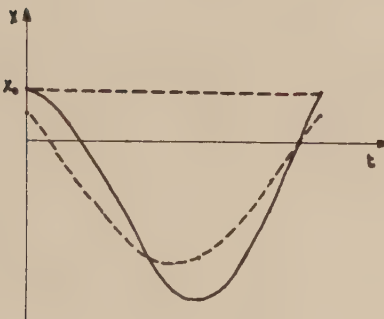
$$\varphi = \varphi_3$$

x_0 peut être négatif (cas de la figure)
R est inférieur à 1



$$\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

x_0 est toujours positif
R prend une valeur très faible
cas limite physiquement



$$\varphi = \varphi_4$$

x_0 est toujours positif
R est compris entre 0 et 1
cas physiquement possible

Ces considérations graphiques sur la fonction $x = f(t)$ mettent bien en évidence les variations, pour une valeur fixe de r (donc de l'angle ψ avec $N=1$) de x_0 et R en fonction de l'angle φ , ainsi que les impossibilités physiques .

● REMARQUE • La relation [1.4.4.9] permet de connaître les valeurs possibles de φ :

$$\sin \varphi = -\frac{(1-R)}{2} \frac{x_0}{d} \frac{1-r^2}{r} \frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$$

$$N=1 \quad \text{et} \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2} \quad \text{entraînent} \quad 1 < r \leq 2 \quad \text{d'où} \quad \sin \varphi \text{ est positif}$$

$$\text{et} \quad 0 < \varphi_a < \pi \quad \text{pour} \quad R \leq 1$$

avec $\varphi = \varphi_a$: déphasage de l'excitation, donné par l'expression analytique .

Or, graphiquement, nous déduisons que $\varphi = \varphi_g$ doit être compris entre π et 2π pour qu'il puisse exister une solution

avec $\varphi = \varphi_g$: déphasage de l'excitation donné par les considérations graphiques.

La contradiction entre les zones de validité de φ_a et φ_g n'est qu'apparente car, graphiquement, nous considérons, non pas la valeur algébrique de $\frac{d}{1-r^2}$, mais sa valeur absolue, ce qui se traduit par :

$$\frac{d}{1-r^2} \cos \varphi_a = \left| \frac{d}{1-r^2} \right| \cos \varphi_g \quad \text{pour } r < 1$$

$$\frac{d}{1-r^2} \cos \varphi_a = \left| \frac{d}{1-r^2} \right| \cos (\varphi_g + \pi) \quad \text{pour } r > 1$$

ou encore : $\varphi_a = \varphi_g + \pi$ pour $r > 1$

CHAPITRE 2

ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT

2.1 - Préliminaire

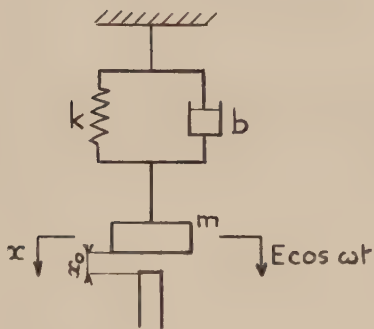


fig. 2.1

L'amortissement apparaît dans tout système mécanique .
Les hypothèses formulées au chapitre 1 restent valables, à l'exception, toutefois, de la première qui devient :

« Les forces d'amortissement du système sont proportionnelles à la vitesse de la masse m »

Le schéma de principe du système, représenté par la fig. 2-1 , comporte un « amortisseur » ou « dash-pot » placé en parallèle avec le ressort de raideur k .

Nous opererons d'une façon sensiblement identique à celle du chapitre 1 pour la détermination de l'expression $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}$ en fonction des paramètres connus .

2.2 - Mise en équation

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m x'' + b x' + k x = E \cos (\omega t + \varphi)$$

b : terme d'amortissement

Posons :

$$\mu = \frac{b}{2m \omega_0} \text{ coefficient d'amortissement , positif et sans dimension}$$

Réolvons l'équation différentielle pour μ inférieur à l'unité . Nous obtenons :

$$x = e^{-\mu \omega_0 t} [A \cos (\Omega t + \psi)] + \frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \cos (\omega t + \varphi) \quad [2.2.1]$$

avec $\Omega = \sqrt{1-\mu^2} \omega_0$: pseudo pulsation propre du système amorti

$\mu, \omega_0, \omega, r, d$: paramètres connus

A, ψ, φ : constantes à déterminer

L'expression de la vitesse est par suite :

$$x' = -e^{-\mu \omega_0 t} A [\Omega \sin(\Omega t + \psi) + \mu \omega_0 \cos(\Omega t + \psi)] - \frac{d(\omega)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad [2-2-2]$$

2 - 3 Résolution

2-3-1 Conditions initiales

Ce sont celles exposées au chapitre 1 par. 3

2-3-2 Remarque fondamentale

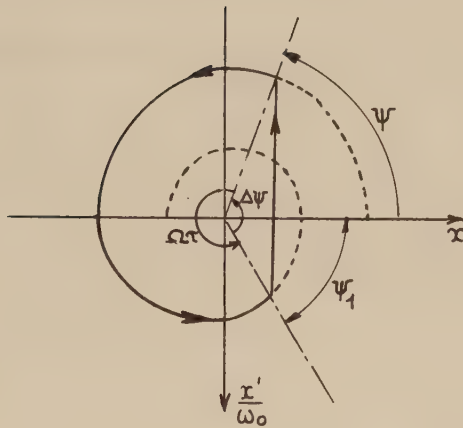


fig. 2.2

Un raisonnement analogue à celui fait pour le système sans amortissement conduit à considérer un déphasage instantané $\Delta\psi$ du terme ψ , à chaque percussion, tel que :

$$\Delta\psi = \psi + \psi_1 \quad [2-3-1]$$

Le diagramme du mouvement : $\frac{x'}{\omega_0} = \xi(x)$ n'est plus une partie de cercle mais une partie de spirale (cf fig. 2,2)

$$d'où \quad \Omega\tau + \Delta\psi = 2\pi \quad [2-3-2]$$

$$\text{et } \cos \psi = e^{-\mu \omega_0 \tau} \cos(\Omega\tau + \psi) \quad [2-3-3]$$

De plus :

$$\omega\tau = 2N\pi \quad [2-3-4]$$

N : nombre entier

relation qui peut s'exprimer :

« Le nombre de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives est un entier »

$$\text{Il découle de [2-3-4] que } \omega_0 \tau = \frac{2N\pi}{r}$$

Posons :

$$\begin{cases} \alpha = \Omega\tau = \sqrt{1-\mu^2} \frac{2N\pi}{r} \\ \beta = e^{-\mu \omega_0 \tau} = e^{-\mu \frac{2N\pi}{r}} \end{cases} \quad [2-3-5]$$

$$[2-3-6]$$

L'expression [2-3-3] devient :

$$\cos \psi = \beta \cos (\alpha + \psi)$$

d'où :

$$\boxed{\operatorname{tg} \psi = \frac{\beta \cos \alpha - 1}{\beta \sin \alpha}} \quad [2-3-7]$$

2-3-3 Conditions initiales appliquées à l'équation du déplacement

L'équation [2-2-1] devient pour $t=0$ - $t = \tau^*$, $t = \tau^+$...

$$x_0 = A \cos \psi + \frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \cos \varphi \quad [2-3-8]$$

2-3-4 Conditions initiales appliquées à l'équation de la vitesse

pour $t=0$ $x'_0 = -R x'(\tau^*) = -A\Omega \sin \psi - A\mu\omega_0 \cos \psi - \frac{d\omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin \varphi$

$$x'(\tau^*) = -\beta A\Omega \sin(\alpha + \psi) - \beta A\mu\omega_0 \cos(\alpha + \psi) - \frac{d\omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin \varphi \quad [2-3-9]$$

En résolvant :

$$\frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin \varphi = \frac{-A}{(1+R)r} \left\{ \sqrt{1-\mu^2} [\sin \psi + R\beta \sin(\alpha + \psi)] + \mu [\cos \psi + R\beta \cos(\alpha + \psi)] \right\} \quad [2-3-10]$$

2-3-5 Résolution

Pour déterminer l'expression de la vitesse de percussion $x'(\tau^*)$ en fonction des différents paramètres connus, nous disposons du système d'équations :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\beta \cos \alpha - 1}{\beta \sin \alpha} \quad [2-3-7]$$

$$A \cos \psi = x_0 - \frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \cos \varphi \quad [2-3-8]$$

$$\omega_0 \beta A [\sqrt{1-\mu^2} \sin(\alpha + \psi) + \mu \cos(\alpha + \psi)] = -x'(\tau^*) - \frac{d\omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin \varphi \quad [2-3-9]$$

$$\frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin \varphi = \frac{-A}{(1+R)r} \left\{ \sqrt{1-\mu^2} [\sin \psi + R\beta \sin(\alpha + \psi)] + \mu [\cos \psi + R\beta \cos(\alpha + \psi)] \right\} \quad [2-3-10]$$

Remplaçons dans [2-3-9], $\sin \varphi$ par sa valeur . Après simplification, il vient :

$$A = \frac{-x'(\tau^*)(1+R)}{\omega_0 \left\{ \sqrt{1-\mu^2} [\beta \sin(\alpha+\psi) - \sin \psi] + \mu [\beta \cos(\alpha+\psi) - \cos \psi] \right\}} \quad [2-3-11]$$

Reportons cette valeur dans [2-3-10] , nous obtenons :

$$\frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \sin \varphi = \frac{x'(\tau^*)}{\omega} \frac{\sqrt{1-\mu^2} [\sin \psi + R \beta \sin(\alpha+\psi)] + \mu [\cos \psi + R \beta \cos(\alpha+\psi)]}{\sqrt{1-\mu^2} [\beta \sin(\alpha+\psi) - \sin \psi] + \mu [\beta \cos(\alpha+\psi) - \cos \psi]} \quad [2-3-12]$$

Posons :

$$Z = \frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}}$$

$$Z_1 = \sqrt{1-\mu^2} [\sin \psi + R \beta \sin(\alpha+\psi)] + \mu [\cos \psi + R \beta \cos(\alpha+\psi)]$$

$$Z_2 = \sqrt{1-\mu^2} [\beta \sin(\alpha+\psi) - \sin \psi] + \mu [\beta \cos(\alpha+\psi) - \cos \psi]$$

Avec ces notations, les expressions [2-3-11] et [2-3-12] deviennent :

$$A = \frac{-x'(\tau^*)(1+R)}{\omega_0 Z_2} \quad [2-3-13]$$

$$Z \sin \varphi = \frac{x'(\tau^*)}{\omega} \frac{Z_1}{Z_2} \quad [2-3-14]$$

$$\text{Or, } x_0 - A \cos \psi = Z \cos \varphi \quad \text{d'après [2-3-8]}$$

$$\text{avec } Z \cos \varphi = \varepsilon \sqrt{Z^2 - (Z \sin \varphi)^2} \quad \varepsilon = \pm 1$$

d'où :

$$\frac{x'(\tau^*)(1+R) \cos \psi}{\omega_0 Z_2} + x_0 = \varepsilon \sqrt{Z^2 - \frac{x'^2(\tau^*)}{\omega^2} \frac{Z_1^2}{Z_2^2}}$$

Elevons les deux membres au carré :

$$x'^2(\tau^*) \left[\frac{(1+R)^2 \cos^2 \psi}{\omega_0^2 Z_2^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \right] + 2x'(\tau^*) \frac{(1+R) x_0 \cos \psi}{\omega_0 Z_2} + x_0^2 - Z^2 = 0$$

En résolvant cette équation du second degré :

$$x'(\tau^*) = \frac{\frac{-(1+R)x_0 \cos \psi}{\omega_0 Z_2} + \frac{\varepsilon}{\omega_0 Z_2} \sqrt{(1+R)^2 x_0^2 \cos^2 \psi - [x_0^2 - Z^2] [(1+R)^2 \cos^2 \psi + \frac{Z_1^2}{r^2}]}}{\frac{\cos^2 \psi}{\omega_0^2 Z_2^2} [(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{Z_1^2}{\cos^2 \psi}]}$$

relation que nous mettrons sous la forme :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{\frac{-(1+R)+\varepsilon}{\cos \psi} \sqrt{(1+R)^2 - \left[1 - \left(\frac{d}{x_0}\right)^2\right] \frac{[(1+R)^2 + \frac{B_1^2}{r^2}]}{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}}}{\frac{1}{B_2} [(1+R)^2 + \frac{B_1^2}{r^2}]} \quad [2.3.15]$$

avec :

$$B_1 = \frac{Z_1}{\cos \psi} = \sqrt{1-\mu^2} [\operatorname{tg} \psi (1+R \beta \cos \alpha) + R \beta \sin \alpha] + \mu [1+R \beta \cos \alpha - R \beta \sin \alpha \operatorname{tg} \psi]$$

$$\text{Or : } \operatorname{tg} \psi = \frac{\beta \cos \alpha - 1}{\beta \sin \alpha}$$

$$\text{d'où : } B_1 = \sqrt{1-\mu^2} [\operatorname{tg} \psi (1+R \beta \cos \alpha) + R \beta \sin \alpha] + \mu (1+R)$$

$$B_2 = \frac{Z_2}{\cos \psi} = \sqrt{1-\mu^2} [\operatorname{tg} \psi (\beta \cos \alpha - 1) + \beta \sin \alpha] + \mu [\beta \cos \alpha - 1 - \beta \sin \alpha \operatorname{tg} \psi]$$

en remplaçant $\operatorname{tg} \psi$ par sa valeur :

$$B_2 = \sqrt{1-\mu^2} (\beta \cos \alpha - 1) \left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{tg} \psi} \right)$$

Les relations [2.3.13] et [2.3.12] entraînent :

$$\frac{A}{x_0} = - \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \frac{1+R}{B_2} \frac{1}{\cos \psi} \quad [2.3.16]$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}}{r} \frac{x_0}{d} \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \frac{B_1}{B_2} \quad [2.3.17]$$

Comme pour le système non amorti, [2.3.15] [2.3.16] [2.3.17] définissent partiellement la solution du problème étudié : la condition nécessaire sera vérifiée si :

- ▲ l'expression sous le radical est positive ou nulle ,
- ▲ $x'(\tau^*)$ est positive .

2-3-6 Vérification

Pour un amortissement nul ($\mu = 0$) il vient :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2N\pi}{r} = \alpha_0 \\ \beta = 1 \\ \Omega = \omega_0 \end{cases}$$

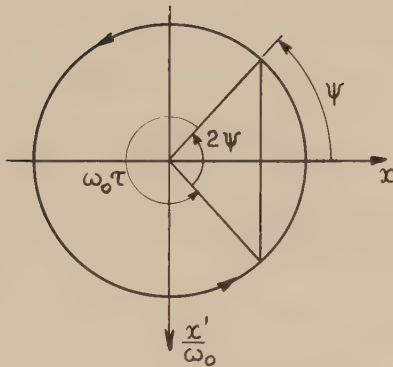


fig. 2.3

le diagramme du mouvement n'est plus une spirale mais un cercle (fig. 2.3)

$$\omega_0 \tau + 2\psi = 2\pi$$

Or $\alpha_0 = \omega_0 \tau$

d'où $\alpha_0 = 2\pi - 2\psi$, soit

$$\begin{cases} \sin \alpha_0 = -\sin 2\psi \\ \cos \alpha_0 = \cos 2\psi \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$B_1 = (1+R \cos 2\psi) \operatorname{tg} \psi - R \sin 2\psi$$

$$B_2 = (\cos 2\psi - 1) \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{tg} \psi} \right)$$

ou encore :

$$\begin{cases} B_1 = (1-R) \operatorname{tg} \psi \\ B_2 = -2 \operatorname{tg} \psi \end{cases}$$

En remplaçant B_1 et B_2 par leurs valeurs respectives dans [2-3-15] , nous retrouvons bien la relation $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ établie pour le système non amorti .

2-4 Quelques valeurs particulières

La présence d'un amortissement, même faible, modifie sensiblement les résultats obtenus au chapitre 1 .

2-4-1 Expression de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ pour $r = 1$

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{-(1+R) + \varepsilon \sqrt{(1+R)^2 - \left[1 - \frac{\left(\frac{d}{x_0}\right)^2}{4\mu^2} [(1+R)^2 + B_1^2] \right]}}{\frac{1}{B_2} [(1+R)^2 + B_1^2]}$$

Les relations B_1 et B_2 sont inchangées .

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\beta \cos \alpha - 1}{\beta \sin \alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{1 - \mu^2} \frac{2N\pi}{r} \\ \beta = e^{-\mu 2N\pi} \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \text{ reste finie pour } r=1, \text{ quelle que soit } \operatorname{tg} \psi$$

2-4-2 Expression de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ quand $\operatorname{tg} \psi = \pm \infty$

$\operatorname{tg} \psi = \pm \infty$ pour $\sin \alpha = 0$. Soit pour $r = r_\infty$ tel que :

$$\sqrt{1 - \mu^2} \frac{2N\pi}{r} = K\pi \quad K \text{ entier quelconque}$$

d'où

$$r_\infty = \frac{2N}{K} \sqrt{1 - \mu^2}$$

Nous obtenons :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{\varepsilon r(\beta + 1) \sqrt{\frac{(\frac{d}{x_0})^2}{(1 - r^2)^2 + 4\mu^2 r^2} - 1}}{(1 - R\beta)} \quad \text{si } \cos \alpha = -1$$

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{\varepsilon r(\beta - 1) \sqrt{\frac{(\frac{d}{x_0})^2}{(1 - r^2)^2 + 4\mu^2 r^2} - 1}}{(1 + R\beta)} \quad \text{si } \cos \alpha = 1$$

La comparaison de ces relations à celle obtenue dans le cas de l'amortissement nul nous incite à ne retenir que la première expression.

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \text{ reste finie quand } \operatorname{tg} \psi \text{ devient infinie .}$$

2-4-3 $\operatorname{tg} \psi$ n'est jamais nulle

Pour que $\operatorname{tg} \psi = 0$, il faudrait :

$$e^{-\mu \frac{2N\pi}{r}} \cos \left(\sqrt{1 - \mu^2} \frac{2N\pi}{r} \right) - 1 = 0$$

ce qui est impossible car

$$e^{-\mu \frac{2N\pi}{r}}$$

est toujours inférieur à l'unité tant que l'amortissement existe ($\mu > 0$)

CHAPITRE 3

VALEURS NUMERIQUES ET GRAPHES THEORIQUES

3.1 Introduction

En donnant aux paramètres de l'expression littérale de la vitesse de percussion, réduite sous la forme $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$ différentes valeurs numériques, nous pourrions tracer les graphes de la fonction $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ à $\frac{x_0}{d}$, R , N et μ constants, puis, en analysant ces courbes, en déduire les lois essentielles régissant le phénomène étudié.

Les calculs seront effectués sur ordinateur I.B.M. 650 au Centre de Calcul Scientifique de l'E.N.S.M.

Nous nous attacherons à réaliser une analyse assez approfondie du système sans amortissement, analyse complétée ensuite par une étude sommaire sur l'influence de l'amortissement.

Rappelons les définitions des paramètres intervenant dans l'expression de la vitesse de percussion :

$\frac{x_0}{d} = \frac{k x_0}{E}$: rapport du produit de la raideur du ressort par la distance, au repos, du percuteur à la butée et de l'amplitude de la force sinusoïdale imposée au système;

$R = \left| \frac{x'_0}{x'(t^*)} \right|$: coefficient de restitution de vitesse : quotient des valeurs absolues des vitesses respectivement après et avant percussion.

N : nombre de cycles entiers décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives.

$r = \frac{\omega}{\omega_0}$: rapport de la pulsation d'excitation et de la pulsation propre du système

$\mu = \frac{b}{2m\omega_0}$: coefficient d'amortissement.

Tous ces paramètres sont sans dimension.

3.2 Réalisation approchée de la condition suffisante

L'étude théorique a montré que les expressions littérales de $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$, avec ou sans amortissement, ne satisfont que la condition nécessaire à la solution du système étudié.

La condition suffisante s'exprime par :

$x < x_0$ pour $p\tau < t < (p+1)\tau$ quel que soit p entier ou encore :

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} < 1 & \text{si } x_0 > 0 \\ \frac{x}{x_0} > 1 & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

Or :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{pour le système sans amortissement}$$

$$x = A e^{-\mu \omega_0 t} \cos(\sqrt{1-\mu^2} \omega_0 t + \psi) + \frac{d}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

pour le système avec amortissement

La condition suffisante devient, pour $t \neq 0, \tau \dots p\tau \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{x_0} \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{\frac{d}{x_0}}{1-r^2} \cos(r \omega_0 t + \varphi) < 1 \quad \text{pour } x_0 > 0 \\ \frac{A}{x_0} \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{\frac{d}{x_0}}{1-r^2} \cos(r \omega_0 t + \varphi) > 1 \quad \text{pour } x_0 < 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{système sans} \\ \text{amortissement} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-\mu \omega_0 t} \left[\frac{A}{x_0} \cos(\sqrt{1-\mu^2} \omega_0 t + \psi) + \frac{\frac{d}{x_0}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \cos(r \omega_0 t + \varphi) \right] < 1 \quad \text{pour } x_0 > 0 \\ e^{-\mu \omega_0 t} \left[\frac{A}{x_0} \cos(\sqrt{1-\mu^2} \omega_0 t + \psi) + \frac{\frac{d}{x_0}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\mu^2 r^2}} \cos(r \omega_0 t + \varphi) \right] > 1 \quad \text{pour } x_0 < 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{système} \\ \text{avec} \\ \text{amortissement} \end{array}$$

Nous pouvons réaliser une condition suffisante approchée en imposant aux relations précédentes qu'elles soient vérifiées, non pas quel que soit t compris entre $p\tau$ et $(p+1)\tau$, mais pour :

$$t = \frac{p\tau}{50}, \frac{2p\tau}{50} \dots \frac{49\tau}{50}$$

ou, plus exactement, en faisant $p=0$, pour :

$$\omega_0 t = \frac{\omega_0 \tau}{50} \dots \frac{49 \omega_0 \tau}{50} \quad \text{car } \omega_0 \tau = \frac{2N\pi}{r} \quad \text{est connu.}$$

Il est possible de concevoir que, pour t compris entre $\frac{m p \tau}{50}$ et $\frac{(m+1) p \tau}{50}$, avec m entier inférieur à 50, la condition ne soit pas vérifiée. Cependant, l'expérimentation nous a montré que la condition approchée donne des résultats excellents.

Dans les calculs numériques, pour chaque valeur de r ($\frac{x_0}{d}$, N , R et μ étant fixés)

vérifiant la condition nécessaire - à savoir qu'il existe une valeur de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ telle que $x'(\tau^*)$ soit positive - nous contrôlerons que la condition suffisante approchée est satisfaite. Dans la négative, la valeur trouvée pour $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ n'est pas solution du système étudié.

3.3 Valeurs numériques et graphes du système sans amortissement

3.3.1 Valeurs numériques des paramètres

L'étude théorique met en évidence l'importance de certains paramètres tels que :

- $\frac{x_0}{d}$ suivant qu'il est supérieur ou inférieur à l'unité ,
- N et r dans l'expression de $\operatorname{tg} \psi$

De plus, il ressort de cette étude la prédominance du signe de $\operatorname{tg} \psi$ dans la résolution de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$, ce qui nous amène à déterminer, au préalable, le signe de $\operatorname{tg} \psi$ suivant les valeurs de r et N , pour r compris entre 1/3 et 10 (cf tableau n° 1)

$$\psi = \pi \left(1 - \frac{N}{r} \right) \text{ en posant } n = 1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi = 0 \quad \text{pour} \quad & \begin{cases} \psi = 2K\pi \quad \text{soit} \quad r = \frac{N}{1-2K} \\ \psi = (2K+1)\pi \quad \text{soit} \quad r = \frac{-N}{2K} \end{cases} \\ \operatorname{tg} \psi = \pm \infty \quad \text{pour} \quad & \psi = \frac{(2K+1)\pi}{2} \quad \text{soit} \quad r = \frac{2N}{1-2K} \end{aligned}$$

En tenant compte de ces remarques, nous retiendrons les valeurs numériques suivantes :

$$N = 1/2/3/4/5/6/7/8$$

$$\frac{x_0}{d} = -1/-0,5/0,5/1/2/5/10$$

$$R = 0,05/0,10/0,25/0,30/0,35/0,40/0,45/0,50/0,55/0,60/0,65/0,70/0,75/1$$

$$r = \text{voir tableau n° 2}$$

3.3.2 Organigramme

Le programme de calcul est établi à partir de l'expression générale :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{2 \operatorname{tg} \psi \left[1 + R + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d}{x_0} \right)^2 [(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi]} - \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right]}{(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \quad \text{en analysant}$$

successivement tous les cas particuliers : $\operatorname{tg} \psi = \pm \infty$, $\operatorname{tg} \psi = 0$, $R = 1$, $r = 1$, etc ...

N/r	1/3	16/47	14/41	12/35	10/29	8/23	7/20	6/17	16/45	5/14	14/39	4/11	7/19	10/27	16/43	3/8	14/37	8/21	5/13	12/31	7/18	16/41	2/5	16/39	7/17	12/29	5/12	8/19	14/33	3/7	
1	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	$\pm\infty$	+	+	+	+	+	+	+	+
3	0	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	0
4	0	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	-
5	0	+	+	+	+	+	-	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	+	+	+	+	+	+	+	+
6	0	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	+	-	+	0	+	+	+	+	+	+	0
7	0	+	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	+	-	-	0	+	$\pm\infty$	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	+
8	0	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	$\pm\infty$	-	-	0	+	+	+	-	-	-	+	+	+	$\pm\infty$	+	+	+	+	+	+	+	+	+

N/r	16/37	10/23	7/16	4/9	14/31	5/11	16/35	6/13	7/15	8/17	10/21	12/25	14/29	16/33	1/2	16/31	14/27	12/23	10/19	8/15	7/13	6/11	16/29	5/9	14/25	4/7	7/12	10/17	16/27	3/5		
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
2	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	
3	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
4	-	-	-	0	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	
5	-	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	-	
6	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	0
7	-	-	0	+	+	+	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	-	0	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	
8	$\pm\infty$	-	-	0	+	+	$\pm\infty$	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	$\pm\infty$	-	-	0	+	+	+	+	$\pm\infty$	

. 34 .

N/r	14/23	8/13	5/8	12/19	7/11	16/25	2/3	16/23	7/10	12/17	5/7	8/11	14/19	3/4	16/21	10/13	7/9	4/5	14/17	5/6	16/19	6/7	7/8	8/9	10/11	12/13	14/15	16/17	1
1	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
2	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
3	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
4	+	+	-	-	-	-	0	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
5	-	-	0	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	0
6	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	0	+	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	0
7	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	0
8	-	0	+	+	+	+	0	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	-	0	+	+	+	+	0

N/r	16/15	14/13	12/11	10/9	8/7	7/6	6/5	16/13	5/4	14/11	4/3	7/5	10/7	16/11	3/2	14/9	8/5	5/3	12/7	7/4	16/9	2	16/7	7/3	12/5	5/2	8/13	14/5	3
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	±∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	±∞	-	-	-	-	-	-	-
6	+	+	+	+	+	+	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

N/r	16/15	10/3	7/2	4	14/3	5	16/3	6	7	8	10
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

vérifiant la condition nécessaire - à savoir qu'il existe une valeur de $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$ telle que $x'(t^*)$ soit positive - nous contrôlerons que la condition suffisante approchée est satisfaite. Dans la négative, la valeur trouvée pour $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$ n'est pas solution du système étudié.

3.3 Valeurs numériques et graphes du système sans amortissement

3.3.1 Valeurs numériques des paramètres

L'étude théorique met en évidence l'importance de certains paramètres tels que :

- $\frac{x_0}{d}$ suivant qu'il est supérieur ou inférieur à l'unité,
- N et r dans l'expression de $\tan \psi$

De plus, il ressort de cette étude la prédominance du signe de $\tan \psi$ dans la résolution de $\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0}$, ce qui nous amène à déterminer, au préalable, le signe de $\tan \psi$ suivant les valeurs de r et N , pour r compris entre 1/3 et 10 (cf tableau n° 1)

$$\psi = \pi \left(1 - \frac{N}{r} \right) \text{ en posant } n = 1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \tan \psi = 0 \quad \text{pour} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2K\pi \quad \text{soit} \quad r = \frac{N}{1-2K} \\ \psi = (2K+1)\pi \quad \text{soit} \quad r = \frac{-N}{2K} \end{array} \right. \\ \tan \psi = \pm \infty \quad \text{pour} \quad & \psi = \frac{(2K+1)\pi}{2} \quad \text{soit} \quad r = \frac{2N}{1-2K} \end{aligned}$$

En tenant compte de ces remarques, nous retiendrons les valeurs numériques suivantes :

$$N = 1/2/3/4/5/6/7/8$$

$$\frac{x_0}{d} = -1/-0,5/0,5/1/2/5/10$$

$$R = 0,05/0,10/0,25/0,30/0,35/0,40/0,45/0,50/0,55/0,60/0,65/0,70/0,75/1$$

$$r = \text{voir tableau n° 2}$$

3.3.2 Organigramme

Le programme de calcul est établi à partir de l'expression générale :

$$\frac{x'(t^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{2 \tan \psi \left[1 + R + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d}{x_0} \right)^2 [(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \tan^2 \psi]} - \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \tan^2 \psi \right]}{(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \tan^2 \psi} \quad \text{en analysant}$$

successivement tous les cas particuliers : $\tan \psi = \pm \infty$, $\tan \psi = 0$, $R = 1$, $r = 1$, etc ...

N/r	1/3	16/47	14/41	12/35	10/29	8/23	7/20	6/17	16/45	5/14	14/39	4/11	7/19	10/27	16/43	3/8	14/37	8/21	5/13	12/31	7/18	16/41	2/5	16/39	7/17	12/29	5/12	8/19	14/33	3/7
1	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

N/r	16/37	10/23	7/16	4/9	14/31	5/11	16/35	6/13	7/15	8/17	10/21	12/25	14/29	16/33	1/2	16/31	14/27	12/23	10/19	8/15	7/13	6/11	16/29	5/9	14/25	4/7	7/12	10/17	16/27	3/5
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

N/r	14/23	8/13	5/8	12/19	7/11	16/25	2/3	16/23	7/10	12/17	5/7	8/11	14/19	3/4	16/21	10/13	7/9	4/5	14/17	5/6	16/19	6/7	7/8	8/9	10/11	12/13	14/15	16/17	1
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

N/r	16/15	14/13	12/11	10/9	8/7	7/6	6/5	16/13	5/4	14/11	4/3	7/5	10/7	16/11	3/2	14/9	8/5	5/3	12/7	7/4	16/9	2	16/7	7/3	12/5	5/2	8/13	14/5	3
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

N/r	16/15	10/3	7/2	4	14/3	5	16/3	6	7	8	10
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

TABLEAU des r

0,14285714	0,351	0,429	0,59259250	0,93	1,72	4,25	7,50
0,145	0,35294118	0,43243243	0,600	0,93333333	1,75	4,30	7,75
0,150	0,353	0,43478261	0,60869560	0,94	1,78	4,35	8
0,15384615	0,35555555	0,4375	0,61538461	0,94117640	1,80	4,50	8,02
0,155	0,35714286	0,438	0,62	0,95	1,82	4,75	8,05
0,160	0,3580	0,44444444	0,625	0,97	1,85	5	8,10
0,165	0,35897436	0,445	0,63157890	1	1,88	5,02	8,15
0,16666667	0,36363636	0,450	0,63636363	1,01	1,90	5,05	8,20
0,170	0,364	0,45161290	0,64	1,03	1,92	5,10	8,25
0,175	0,36842105	0,45454545	0,65	1,0666666	1,94	5,15	8,30
0,180	0,369	0,455	0,66666667	1,0769230	1,96	5,20	8,35
0,18181818	0,370	0,45714286	0,67	1,08	2	5,25	8,50
0,185	0,37037037	0,46153851	0,69565210	1,0909091	2,02	5,30	8,75
0,190	0,37209302	0,462	0,70	1,10	2,05	5,35	9
0,195	0,375	0,46666667	0,70588230	1,1111111	2,10	5,50	9,25
0,200	0,376	0,467	0,71428570	1,1428571	2,15	5,75	9,50
0,205	0,37837838	0,47058823	0,72727272	1,1666666	2,20	6	9,75
0,210	0,380	0,471	0,73684210	1,18	2,30	6,02	10
0,215	0,38095238	0,475	0,75	1,20	2,35	6,05	
0,220	0,382	0,47619048	0,75190470	1,22	2,50	6,10	
0,22222222	0,38461538	0,480	0,76923070	1,25	2,75	6,15	
0,230	0,385	0,48275862	0,77777778	1,28	3	6,20	
0,240	0,38709677	0,48484848	0,78	1,30	3,02	6,25	
0,245	0,38888889	0,500	0,80	1,32	3,05	6,30	
0,250	0,389	0,505	0,81	1,35	3,10	6,35	
0,260	0,390	0,51612900	0,82352940	1,38	3,15	6,50	
0,270	0,39024390	0,51851850	0,83	1,40	3,20	6,75	
0,280	0,400	0,52173910	0,83333333	1,42	3,25	7	
0,28571428	0,401	0,52631570	0,84	1,45	3,30	7,02	
0,290	0,41025641	0,53333333	0,85	1,48	3,35	7,05	
0,300	0,41176470	0,53846153	0,85714280	1,50	3,50	7,10	
0,310	0,412	0,54	0,86	1,52	3,75	7,15	
0,320	0,41379310	0,54545454	0,875	1,54	4	7,20	
0,33333333	0,41666667	0,55172410	0,88	1,55	4,02	7,25	
0,335	0,418	0,55555555	0,89	1,58	4,05	7,30	
0,34042553	0,42105263	0,560	0,90	1,60	4,10	7,35	
0,34146341	0,42424242	0,57142850	0,90909091	1,62	4,15		
0,34285714	0,425	0,58	0,92	1,65	4,20		
0,34482750	0,42857143	0,58333333	0,923076990	1,68			
0,34782609		0,58823520		1,70			
0,348							
0,349							
0,350							

L'organigramme de ce programme, présenté page 37 montre clairement tous les aspects possibles des calculs suivant les valeurs des paramètres.

Remarquons que s'il existe une solution, elle répond à la fois à la condition nécessaire $x'(\tau^*)$ positive et à la condition suffisante approchée .

3. 3. 3 Présentation des résultats

Les résultats des calculs numériques sont présentés sous la forme des graphes de la fonction

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = f(r) \text{ pour } \frac{x_0}{d}, R \text{ et } N \text{ constants .}$$

Il n'est pas possible de représenter sur les diagrammes toutes les valeurs numériques traitées, en raison de la complexité des réseaux de courbes . Aussi, ne tracerons-nous que les graphes qui, à notre avis, semblent utiles à l'analyse de la solution du système.

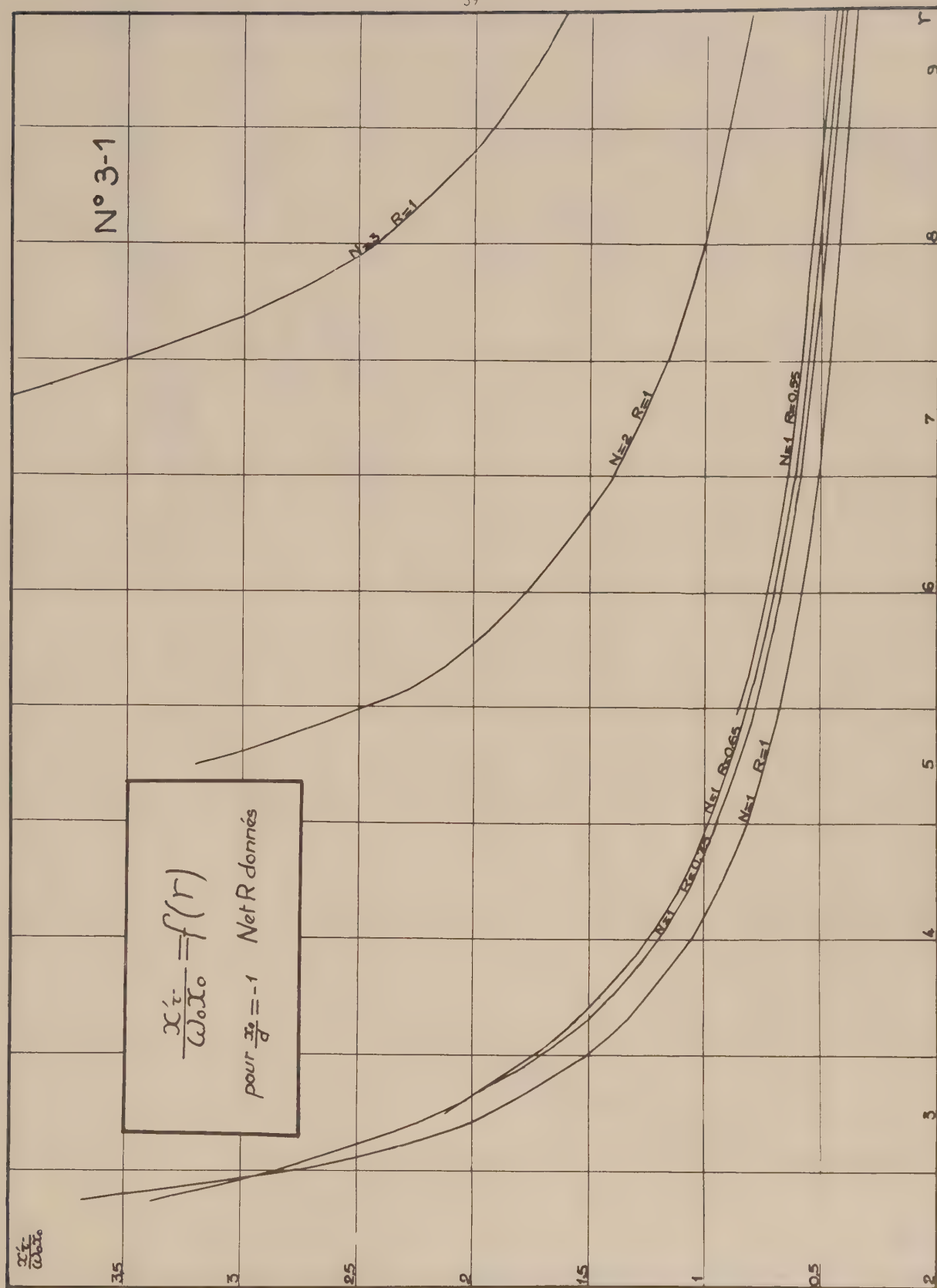
Quand r est supérieur à 2, et pour chaque valeur de r , la solution - si elle existe - a toujours deux valeurs distinctes ou confondues :

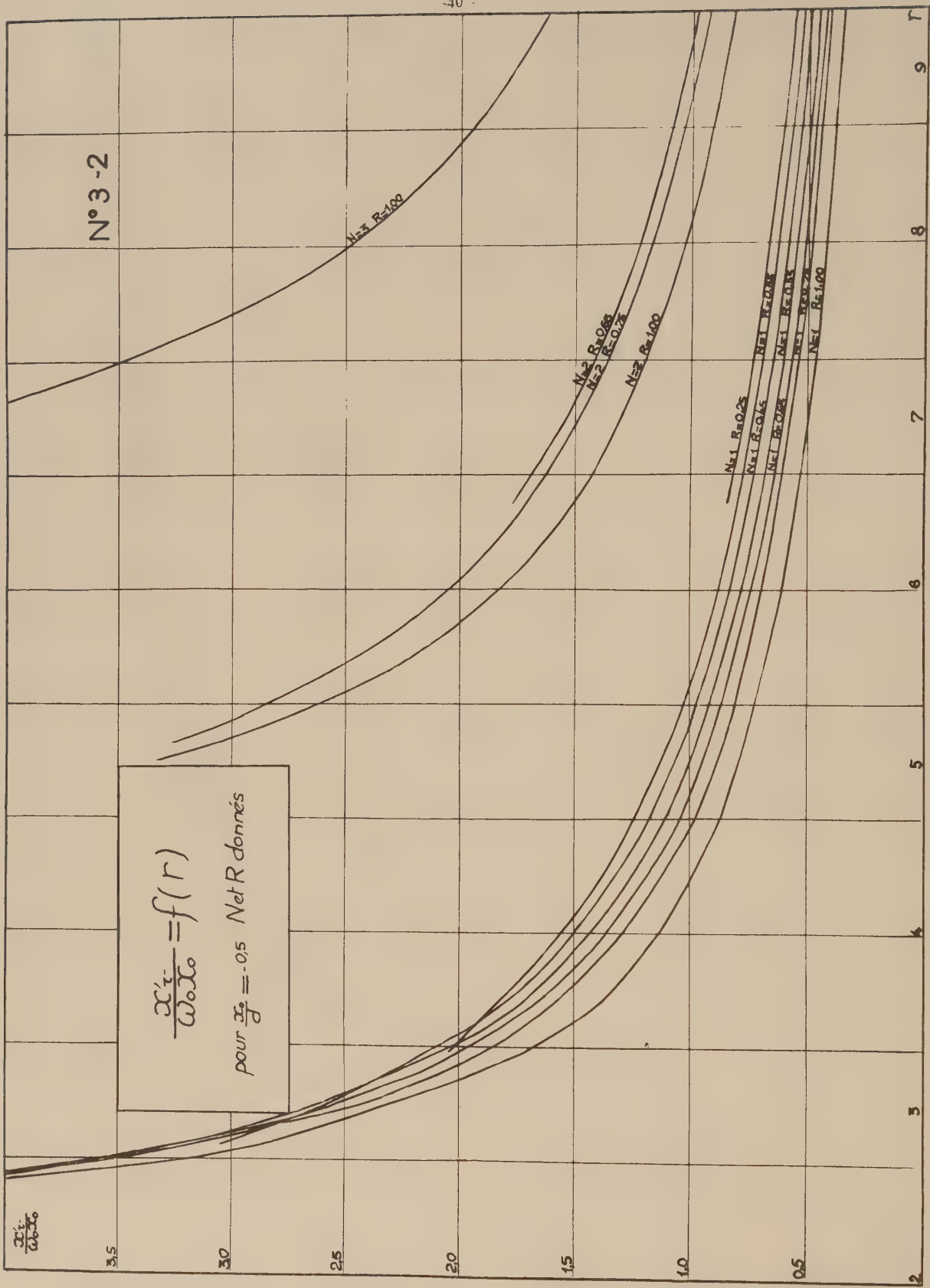
$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} (+) \text{ pour } \varepsilon = 1 \text{ et } \frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} (-) \text{ pour } \varepsilon = -1$$

Cependant, nous nous limiterons au tracé des courbes correspondant à la valeur la plus élevée de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ pour chaque r , afin de ne pas surcharger les diagrammes .

Nous obtenons 17 diagrammes répartis ainsi :

N°	$\frac{x_0}{d}$	r	Observations
3-1	-1	≥ 2	il n'existe pas de solution pour $r < 2$ « « «
3-2	-0,5	≥ 2	
3-3	0,5	< 2	
3-4	0,5	≥ 2	agrandissement de $N = 8$
3-5	0,5	> 2	
3-6	1	< 2	
3-7	1	≥ 2	agrandissement de $N = 8$
3-8	1	> 2	
3-9	2	< 2	
3-10	2	≥ 2	agrandissement de $N = 8$
3-11	2	> 2	
3-12	5	< 2	
3-13	5	≥ 2	agrandissement de $N = 8$
3-14	5	> 2	
3-15	10	< 2	
3-16	10	≥ 2	agrandissement de $N = 8$
3-17	10	> 2	



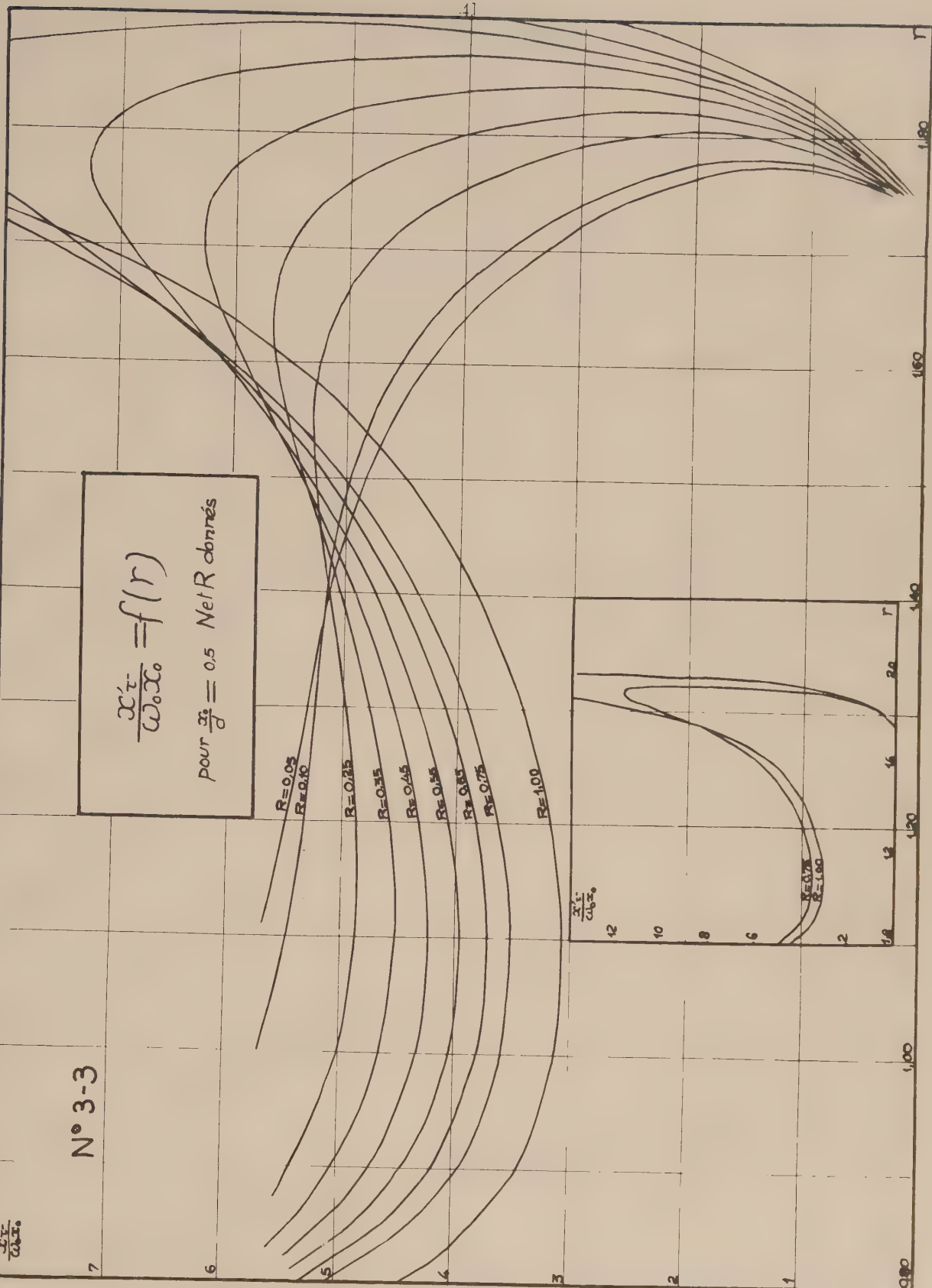
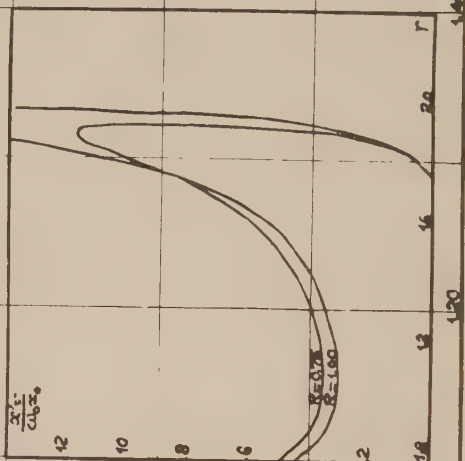
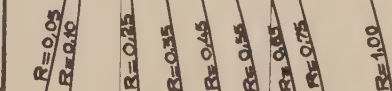


N° 3 - 2

233

$$\frac{x'_i}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

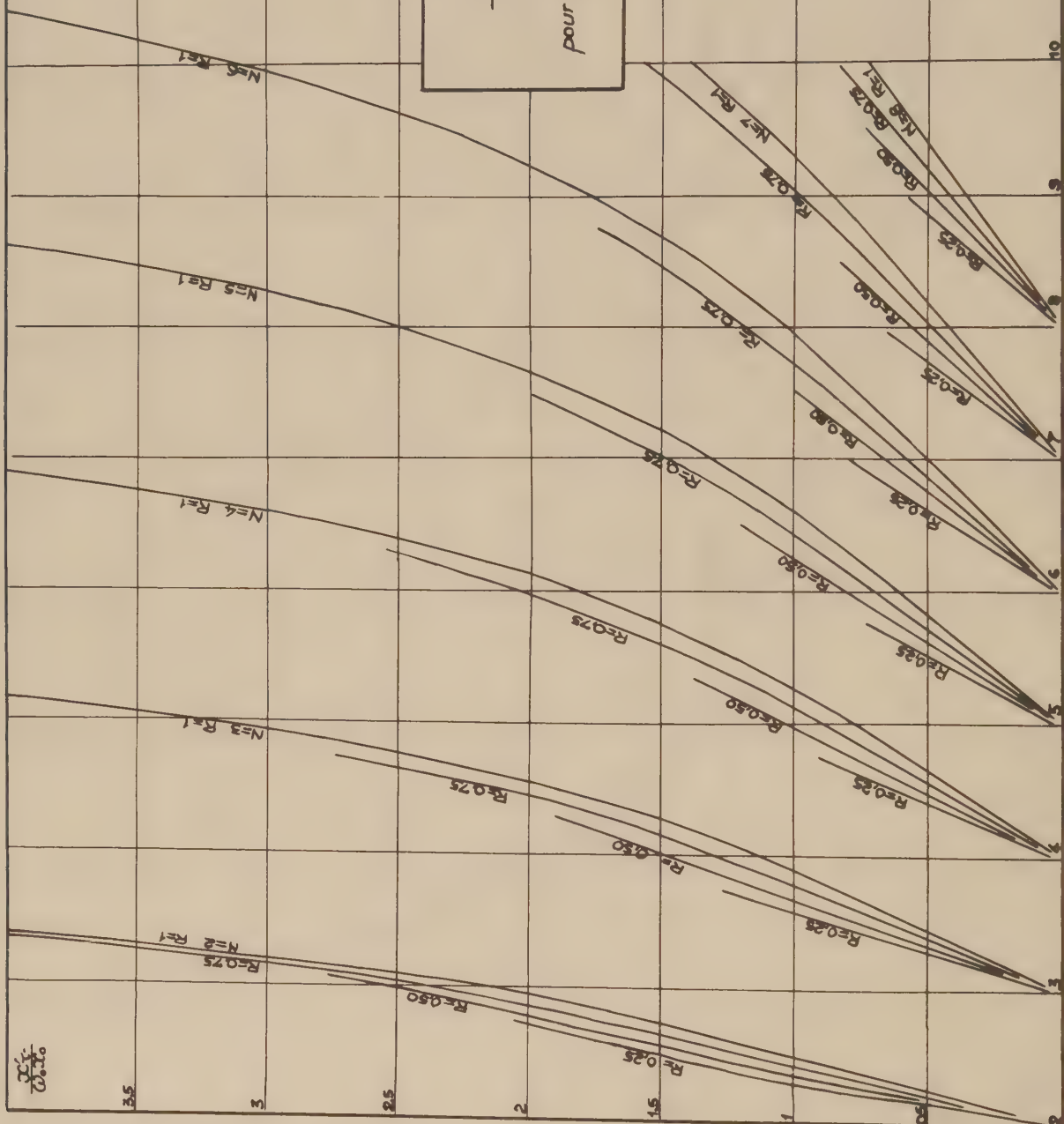
pour $\frac{x_0}{\sigma} = 0,5$ Net R donnés

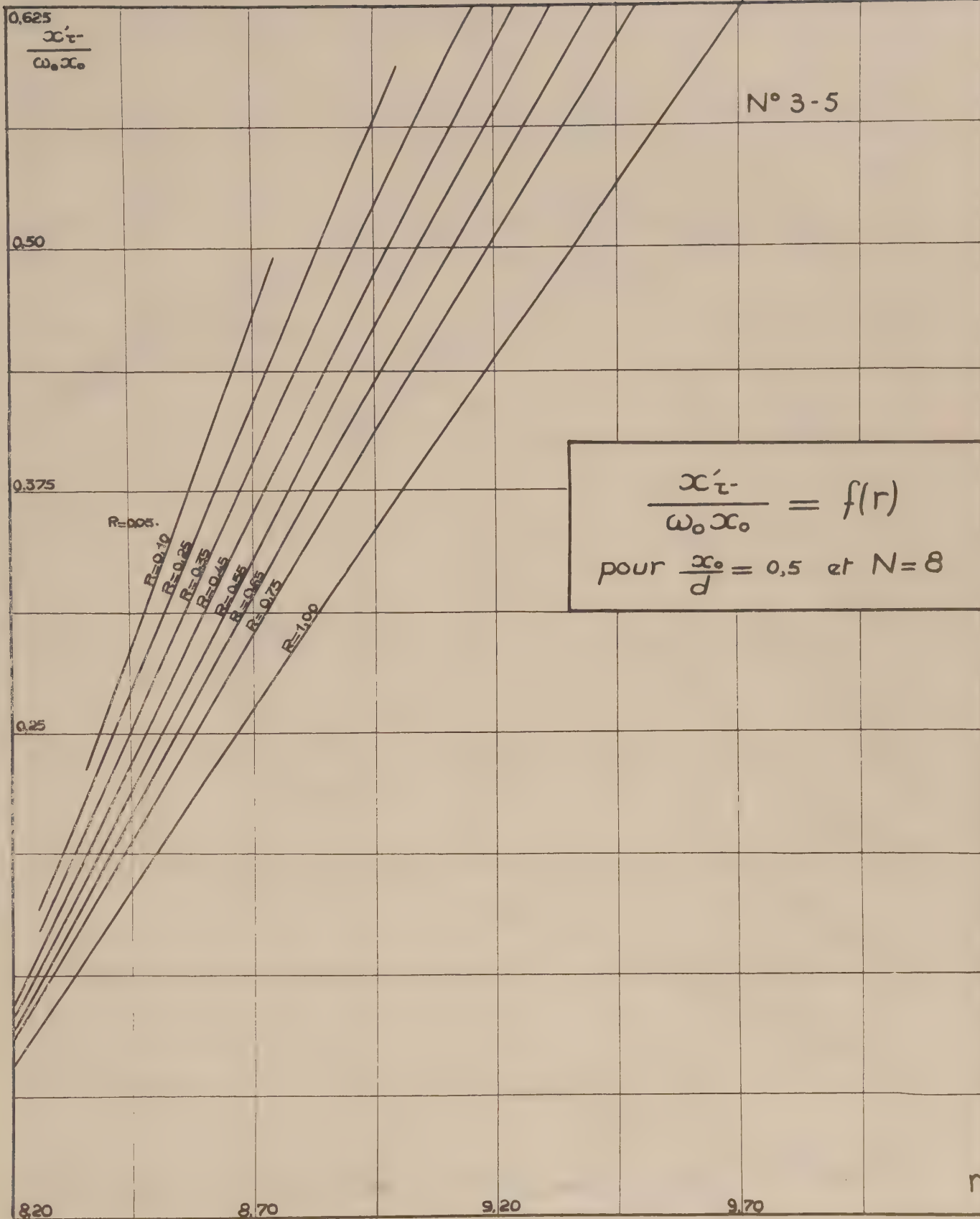


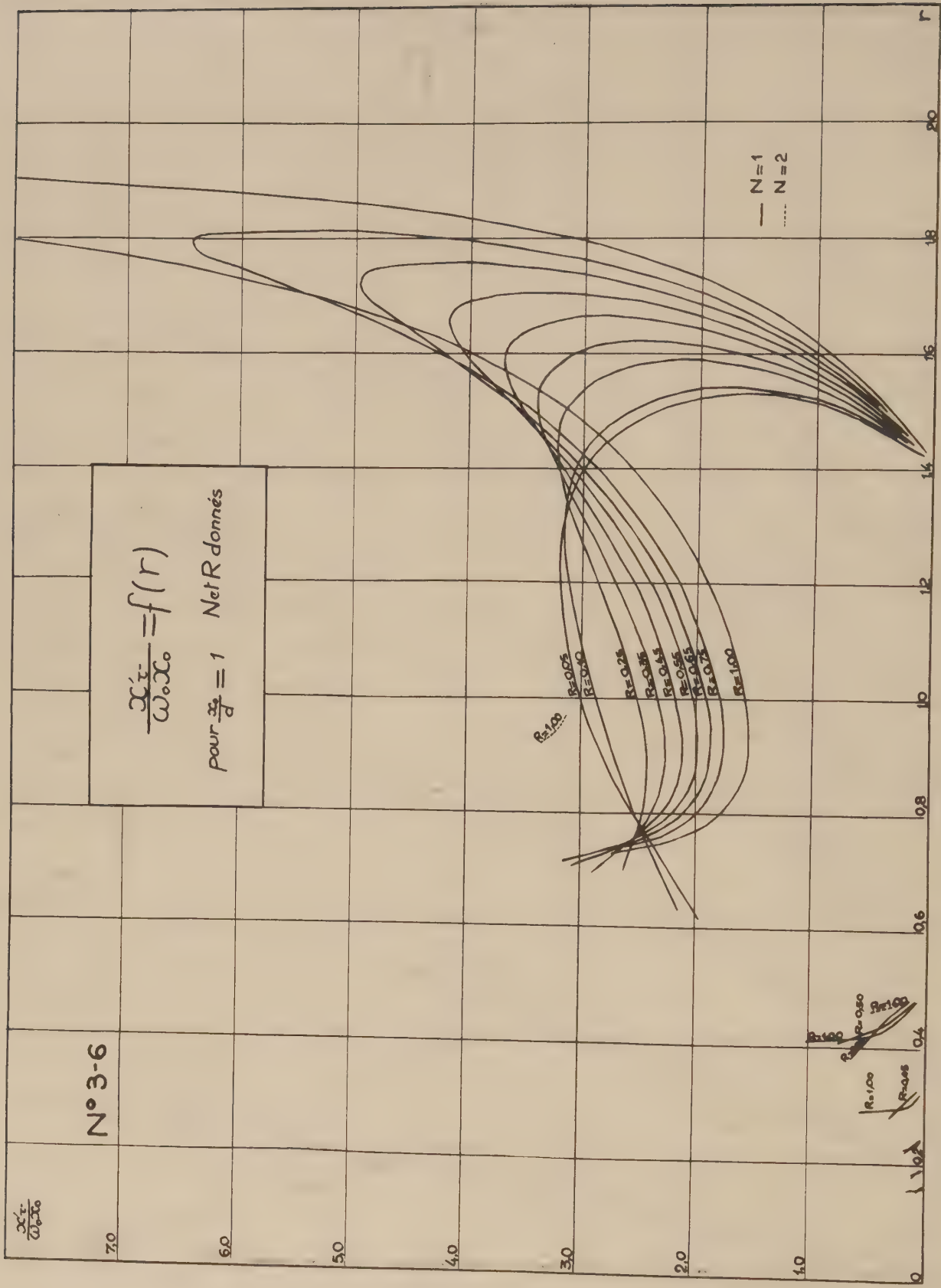
N° 3-4

$$\frac{x'_{\tau}}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

pour $\frac{x_0}{g} = 0,5$ Net R donnés



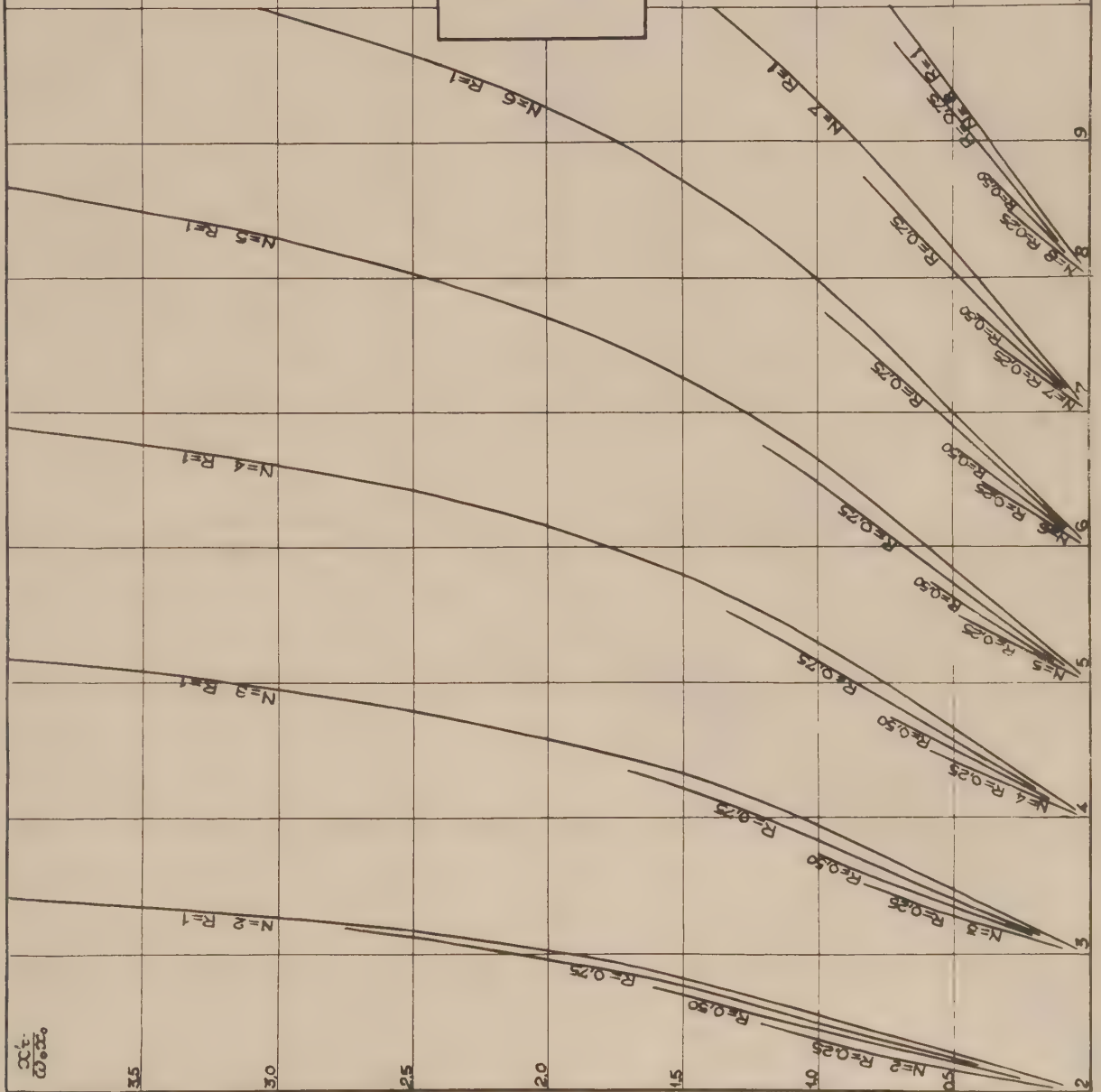




N° 3-7

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = f(r)$$

pour $\frac{p}{q} = 1$ Net R donnés



$\frac{x'_\tau}{\omega_0 x_0}$

N° 3-8

$$\frac{x'_\tau}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

pour $\frac{x_0}{d} = 1$ et $N=8$

1,0

0,75

0,50

0,25

8,0

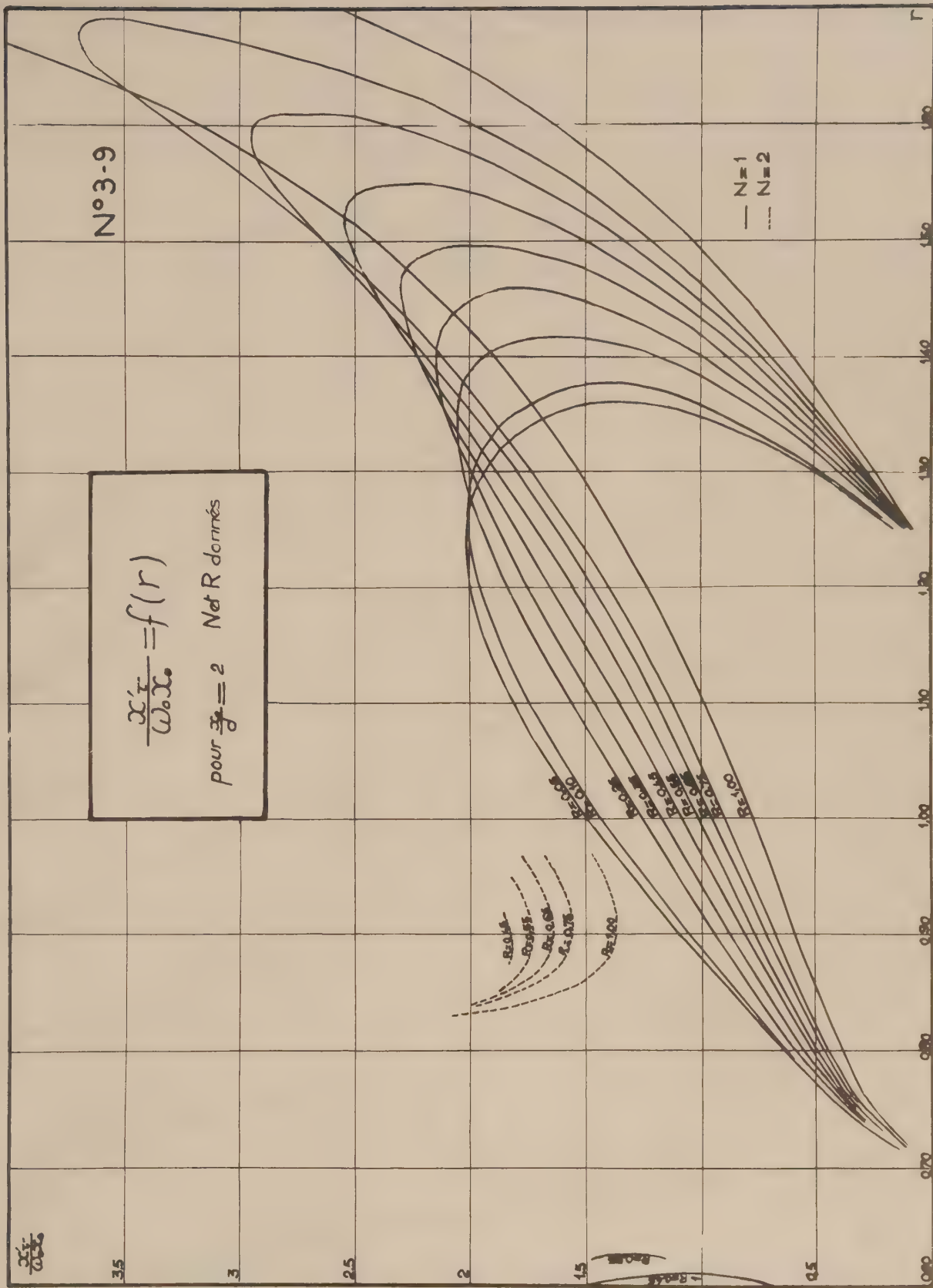
8,50

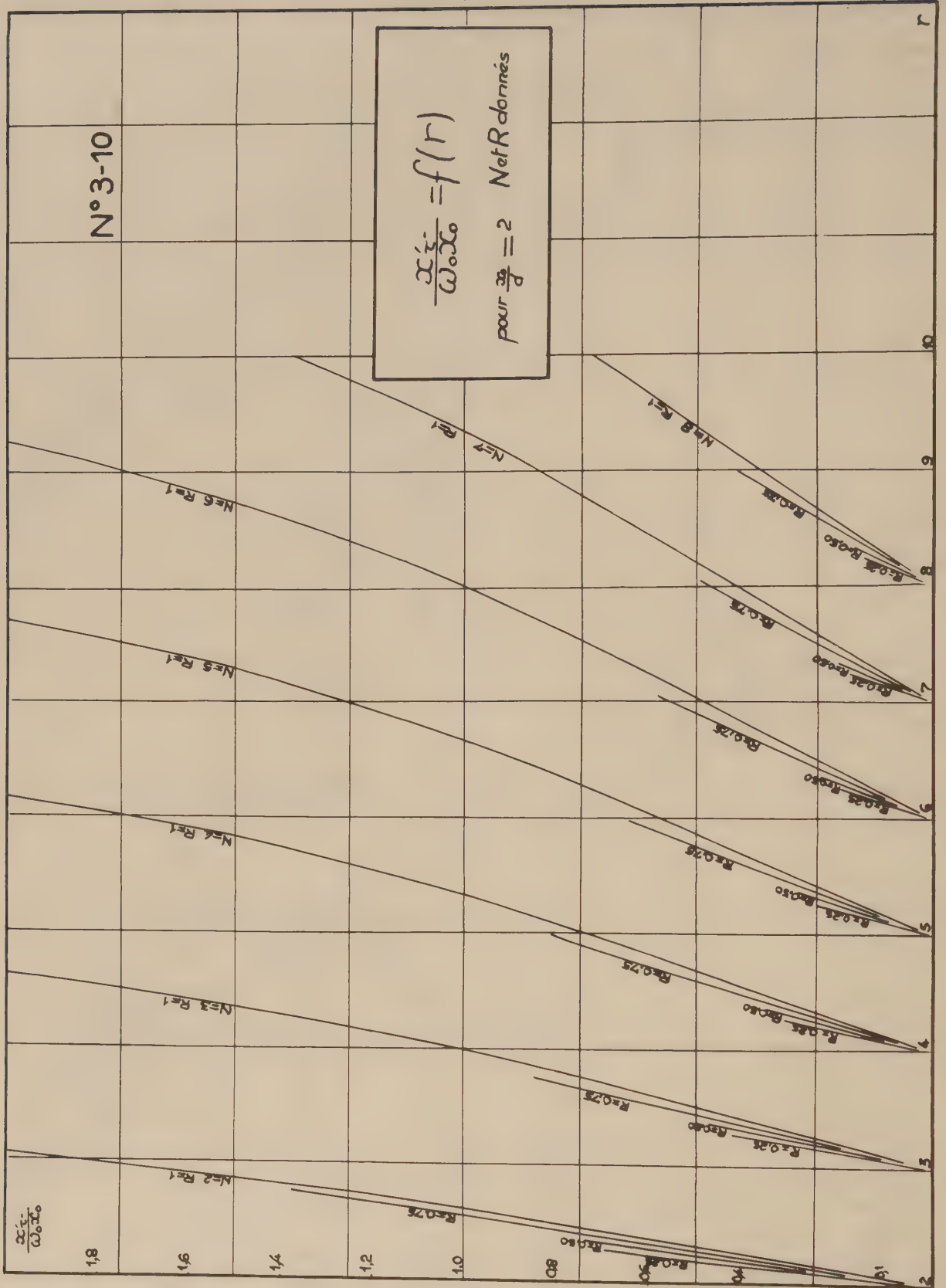
9,0

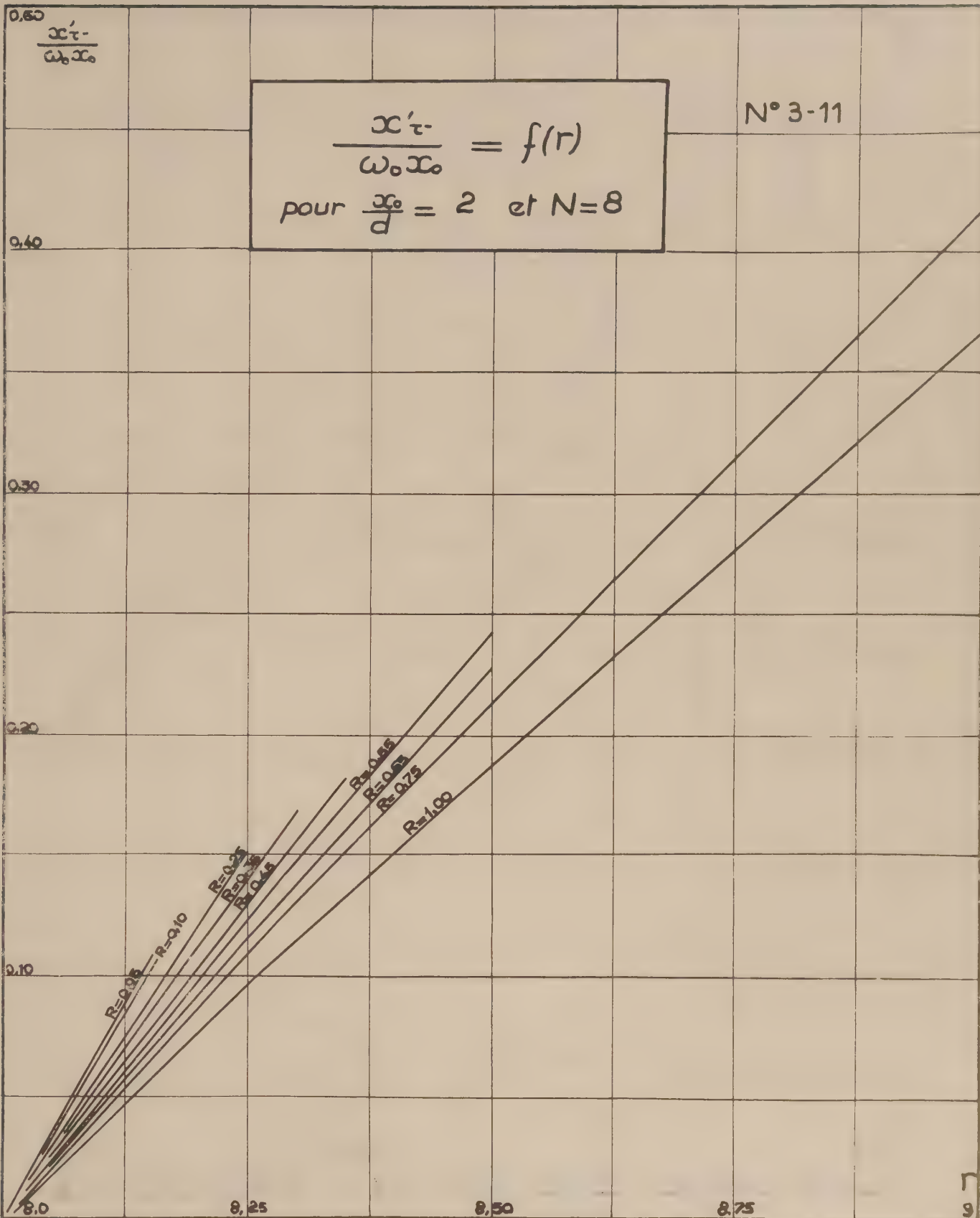
9,50

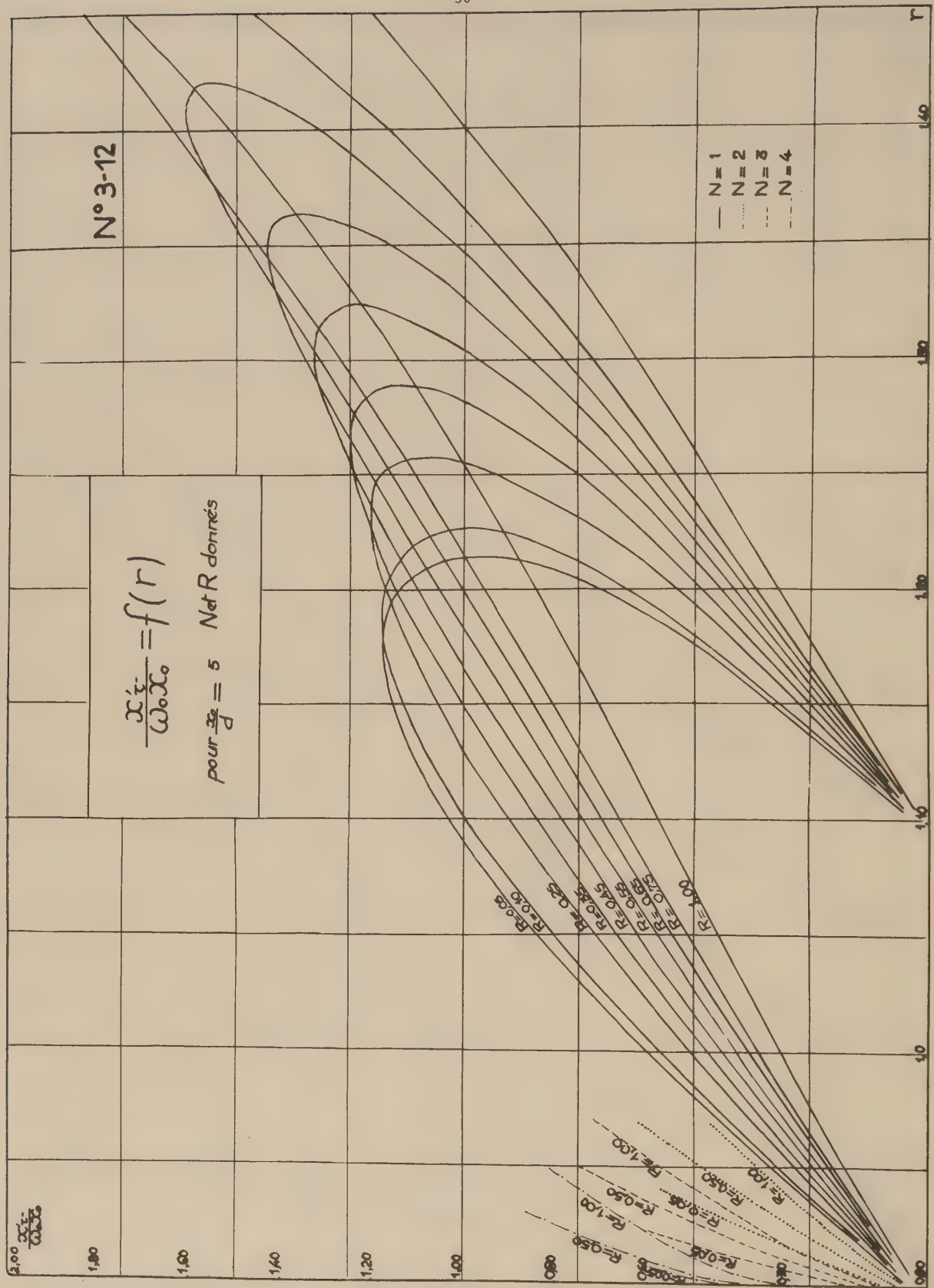
9,7

$R=0,05$
 $R=0,10$
 $R=0,25$
 $R=0,50$
 $R=0,75$
 $R=1,00$



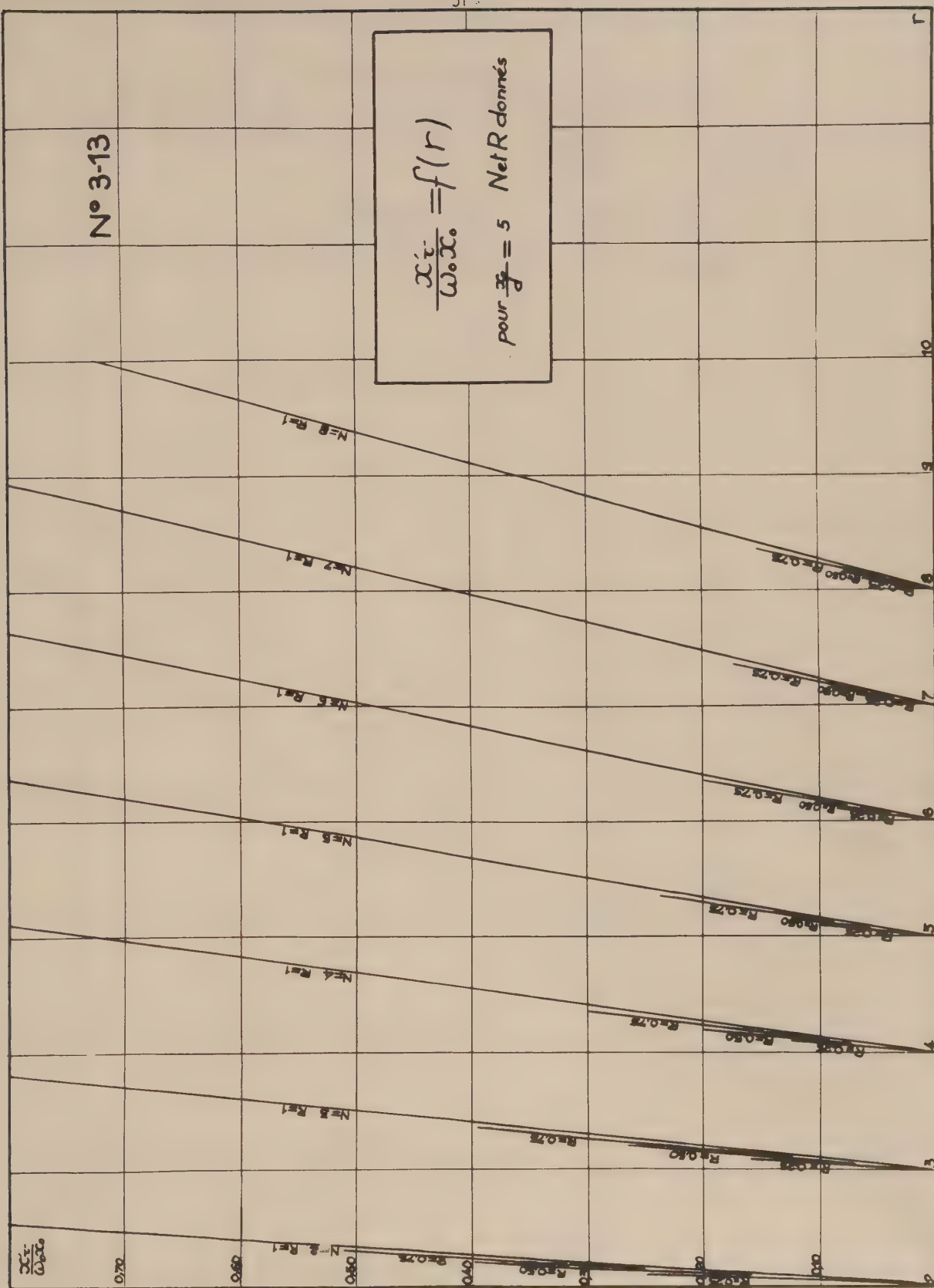






N° 3-13

$$\frac{x'_i}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

pour $\frac{N}{g} = 5$ Net R donnés

$$0,25 \frac{x'_{\tau^-}}{\omega_0 x_0}$$

N° 3-14

$$\frac{x'_{\tau^-}}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

pour $\frac{x_0}{d} = 5$ et $N=8$

0,20

0,15

0,10

0,05

8,0

8,1

8,2

8,3

8,4

R=0,05

R=0,10

R=0,25

R=0,50

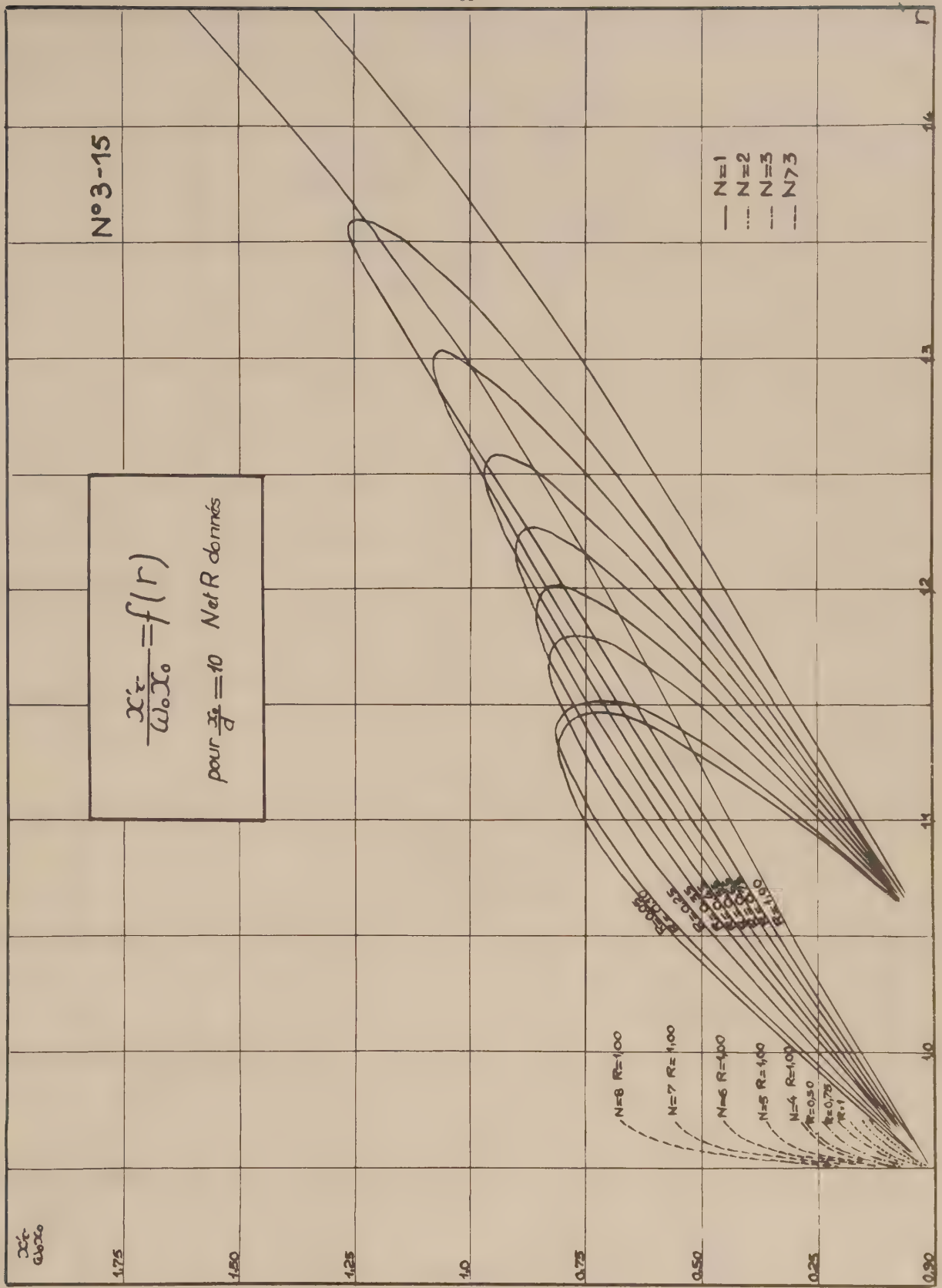
R=0,45

R=0,65

R=0,85

R=0,75

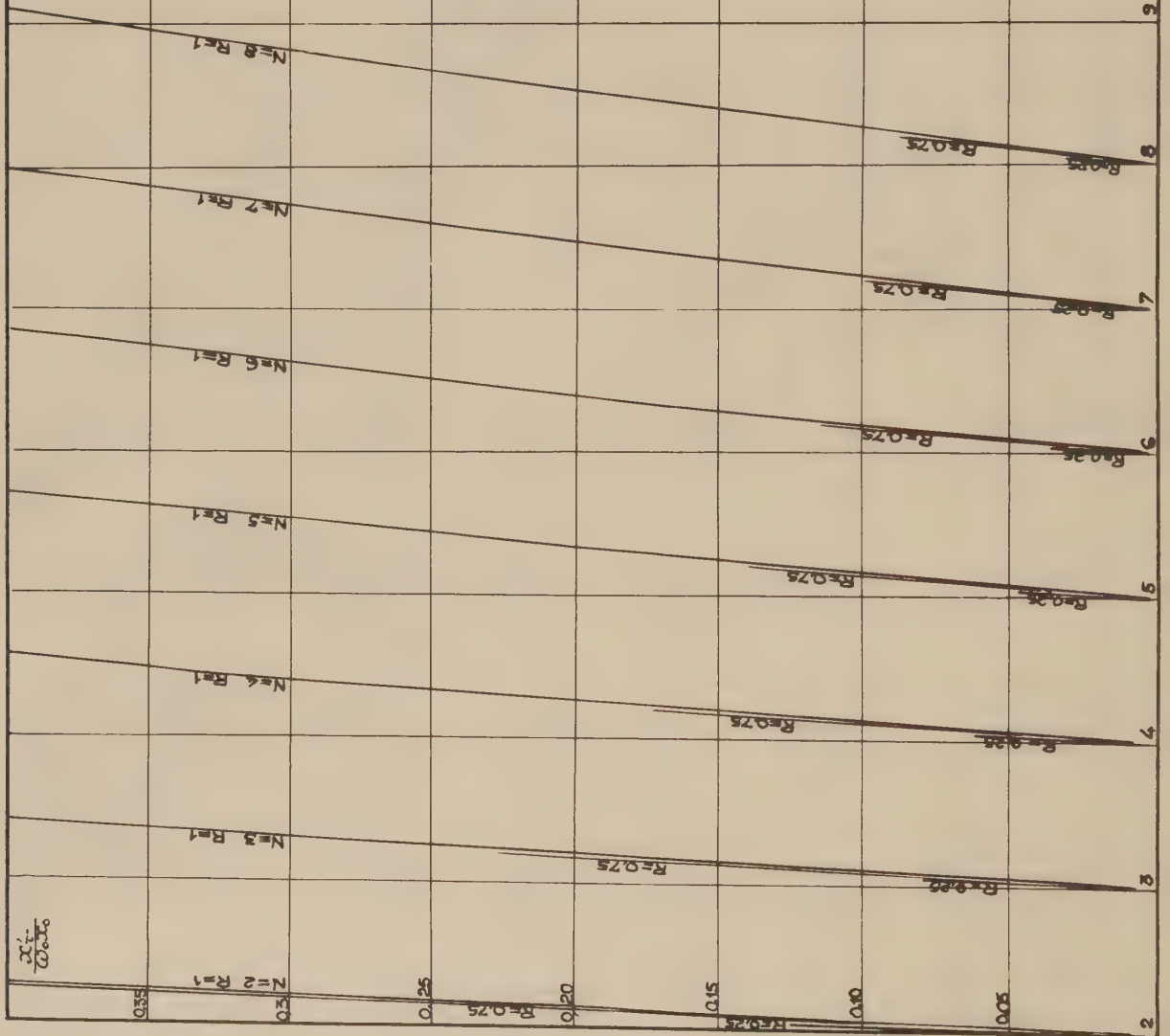
R=1,00



N^o 3-16

$$\frac{x'x}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

pour $\frac{x_2}{d} = 10$



$$\frac{x'_t}{\omega_0 x_0}$$

N° 3-17

$$\frac{x'_t}{\omega_0 x_0} = f(r)$$

pour $\frac{x_0}{d} = 10$ et $N = 8$

0,10

0,075

0,050

0,025

 $R = 0,05$
 $R = 0,10$
 $R = 0,25$
 $R = 0,50$
 $R = 0,75$
 $R = 0,50$
 $R = 0,75$
 $R = 1,00$

8,0

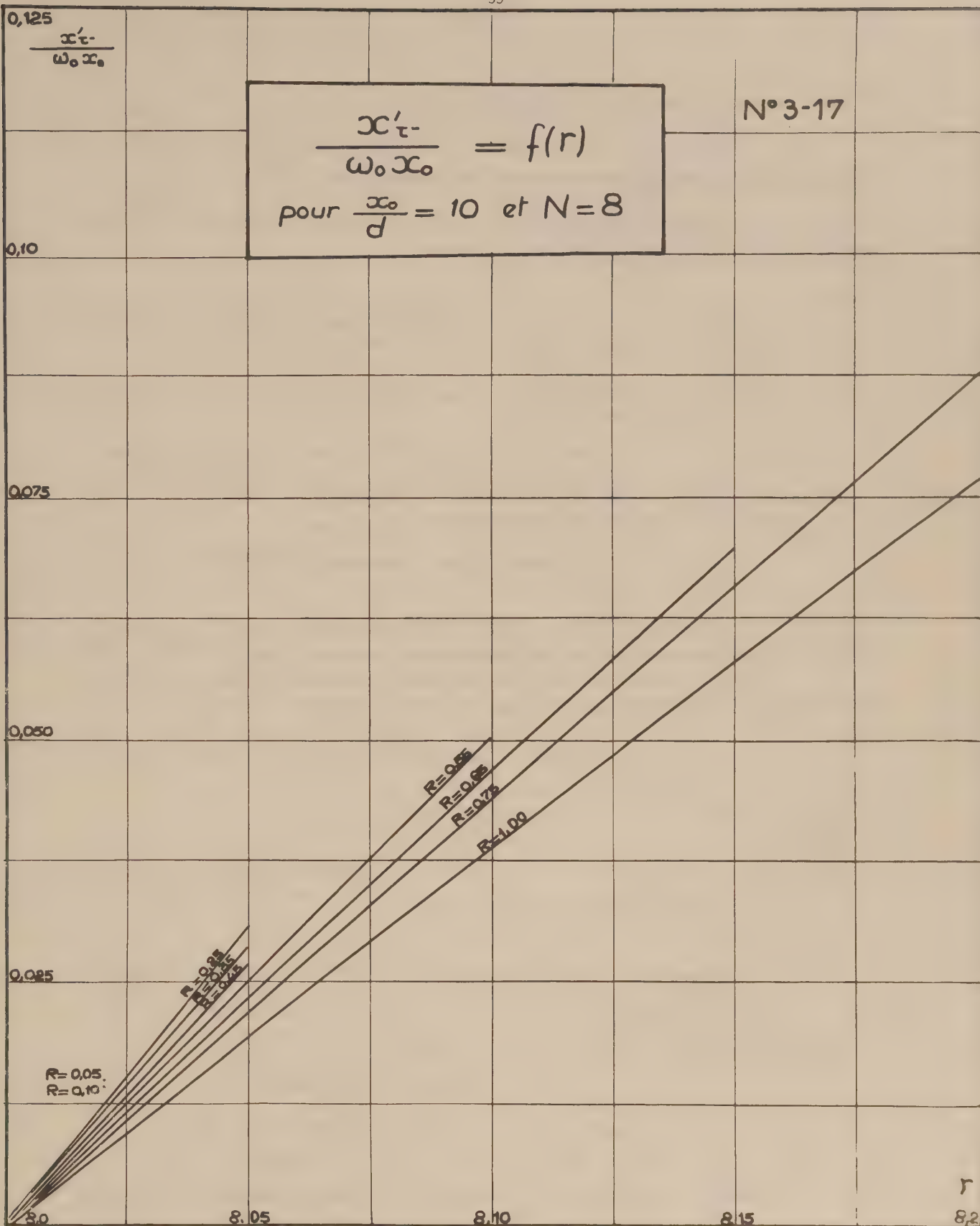
8,05

8,10

8,15

8,2

r



3.3.4 Analyse des résultats - Conclusions

L'étude théorique établie au chapitre 1, complétée par les graphes de la fonction $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} = f(r)$, définit bien le phénomène que nous nous sommes proposé d'étudier.

Nous pouvons en dégager les caractéristiques essentielles, en définissant comme vitesse réduite de percussion $v = \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}$, variable sans dimension.

3.3.4.1 Le mouvement est régulier si, et seulement si, le nombre de cycles décrits par l'excitation, entre deux percussions consécutives, est un entier.

3.3.4.2 Le phénomène de résonance des systèmes à un degré de liberté n'existe plus lors des percussions.

3.3.4.3 La vitesse de percussion $x'(\tau^-)$ ne devient infinie que si, d'une part, le coefficient de restitution de vitesse est unité et si, d'autre part, $\psi = K \frac{\pi}{2}$ (K entier) pour les valeurs de r et N considérées.

3.3.4.4 La percussion transforme un phénomène vibratoire linéaire en phénomène non linéaire.

Le caractère non linéaire du système est dû au déphasage instantané du paramètre ψ à chaque percussion. Entre deux percussions consécutives, le mouvement est régi par une équation linéaire.

Le type de cycles obtenus est celui des systèmes autonomes de la mécanique non linéaire; c'est la périodicité du mouvement qui permet d'avoir des cycles. Par exemple, pour :

$$\bullet \frac{x_0}{d} > 0 \quad N = 1 \quad 0,6 < r < 2$$

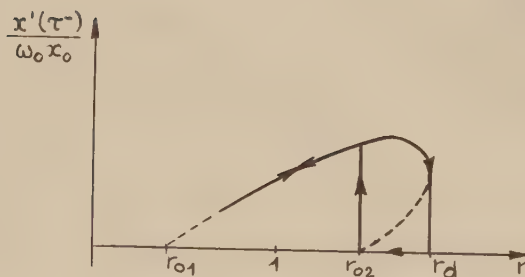


fig 3-1

1^{er} cas (fig. 3-1)

r croît : accrochage automatique à partir de $r_{01} = \sqrt{1 - \frac{d}{x_0}}$

$r = r_d$: décrochage

r décroît de $r \geq r_d$: pas de percussion jusqu'à $r_{02} = \sqrt{1 + \frac{d}{x_0}}$

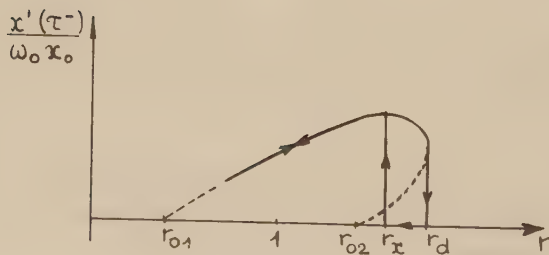


fig. 3-2

2^{ème} cas (fig. 3-2)

$r = r_x$ tel que $r_d > r_x > r_{02}$

la percussion ne se produit que si elle est provoquée. Elle est ensuite stable et régulière

$$\bullet \quad \frac{x_0}{d} > 0 \quad N \neq 1 \quad r > 2$$



fig. 3.3

L'accrochage n'est jamais automatique. Il doit être provoqué.

La théorie met en évidence ce phénomène car, dans la plage considérée des r , la résolution de

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \quad \text{entraîne, si elle est}$$

possible, pour un r fixé, deux valeurs distinctes de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ (ou confondues pour le point de décrochement)

3.3.4.5 Le maximum de la vitesse de percussion, pour un $\frac{x_0}{d}$ constant, croît avec R . Il se situe toujours dans une zone où l'accrochage n'est pas automatique.

3.3.4.6 Pour $\frac{x_0}{d}$ positif, la valeur r_d de décrochement décroît avec R , à $\frac{x_0}{d}$ constant et décroît quand $\frac{x_0}{d}$ croît, à R constant.

3.3.4.7 La vitesse réduite de percussion décroît quand $\frac{x_0}{d}$ croît.

3.3.4.8 Pour $\frac{x_0}{d}$ positif (0,5/1/2/5/10)
 - seul le cas $N=1$ existe quand r varie de 1 à 2.
 - N supérieur à 1 apparaît, pour certaines valeurs de r inférieures à 1 et supérieures à 2.

Pour $\frac{x_0}{d}$ négatif (-0,5/-1) il ne semble exister de solution, quels que soient N et R , que si r est supérieur à 2.

NOTA :

[1] Les caractéristiques [3-3-4-5], [3-3-4-6], [3-3-4-7] et [3-3-4-8] ne sont, en principe, valables que pour les valeurs numériques retenues pour les paramètres. En particulier pour [3-3-4-8], avec $\frac{x_0}{d} = -0,2$ et $R = 0,75$, il existe des valeurs pour $N=1$ et r inférieur à 2.

[2] détermination de r_{01} et r_{02} :

A $r = r_{01}$ et $r = r_{02}$, correspond une vitesse de percussion nulle ($\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = 0$),

ce qui signifie que le percuteur, animé d'un mouvement sinusoïdal forcé, vient juste effleurer la butée, d'où :

$$x = x_0 = \frac{\pm d}{1-r^2} \quad \text{avec signe + pour } r < 1 \\ \text{signe - pour } r > 1$$

$r_{01} = \sqrt{1 - \frac{d}{x_0}}$
$r_{02} = \sqrt{1 + \frac{d}{x_0}}$

VERIFICATION

En remplaçant r par sa valeur dans l'expression sous le radical de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ (cf [1-4-4-7]), il vient :

$$\underbrace{\left(\frac{\frac{d}{x_0}}{1-r_0} \right)^2}_{=1} [(1+R)^2 + \frac{1}{r_0^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi] - \frac{1}{r_0^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi = (1+R)^2$$

d'où $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = 0$ avec $\varepsilon = -1$

Pour $\varepsilon = +1$, nous retrouvons la deuxième valeur, non nulle de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ correspondant à $r = r_{02}$.

3 - 4 Influence de l'amortissement

3.4.1 Valeurs numériques des paramètres

Nous nous limiterons à montrer l'influence de l'amortissement pour une seule valeur de $\frac{x_0}{d}$ et de R , en faisant varier le coefficient μ .

$$\frac{x_0}{d} = 1$$

$$R = 0,75$$

$$N = 1$$

$$\mu = 0, 1/100, 10/100, 20/100, 30/100, 40/100, 50/100, 60/100$$

$$r = \text{de } 0,5 \text{ à } 2, \text{ avec un pas de } 5/100$$

3.4.2 Programme de calculs

Comme pour le système sans amortissement, un programme de calculs est établi à partir de l'expression générale de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ (cf [2-3-15]) en imposant la condition suffisante approchée décrite au par. 3-2.

N°3-18

$\frac{x'v}{\omega_0 x_0} = f(r)$
pour $\frac{x_0}{d} = 1, R = 0,75$
 $N=1$ et μ donné

$\frac{x'v}{\omega_0 x_0}$

7

6

5

4

3

2

1

0,6

$\mu = 1/400$

$\mu = 1/10$

$\mu = 2/10$

$\mu = 3/10$

$\mu = 4/10$

$\mu = 5/10$

0,8

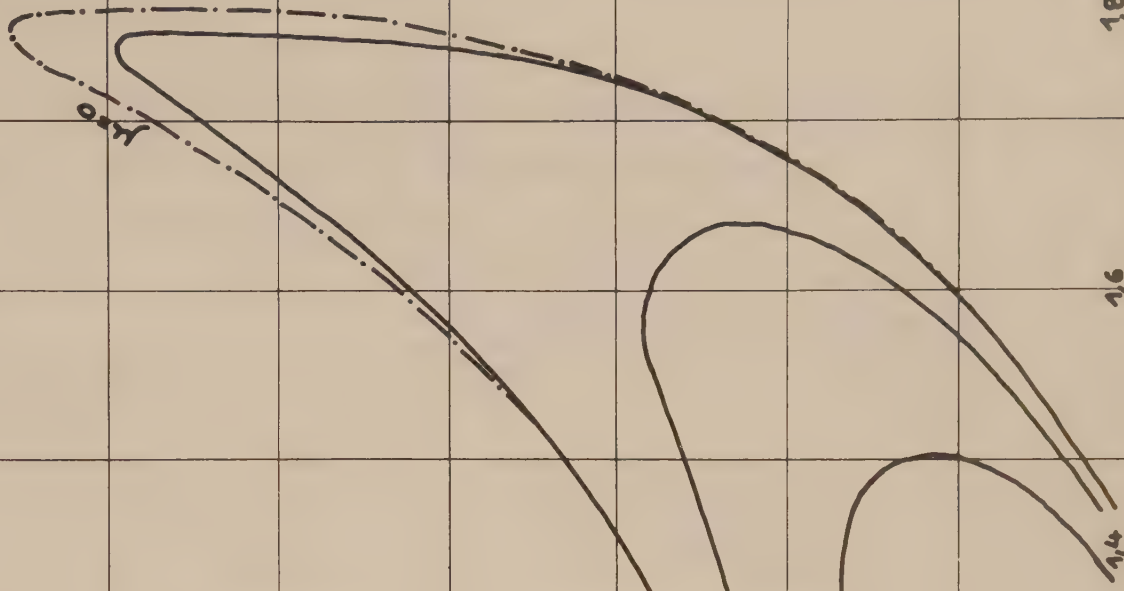
1

1,2

1,4

1,6

1,8



3.4.3 Résultats et conclusions

Le diagramme [3-18] représente le graphe de la fonction $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ à $\frac{x_0}{d}$, R et N constants pour les différentes valeurs retenues pour μ .

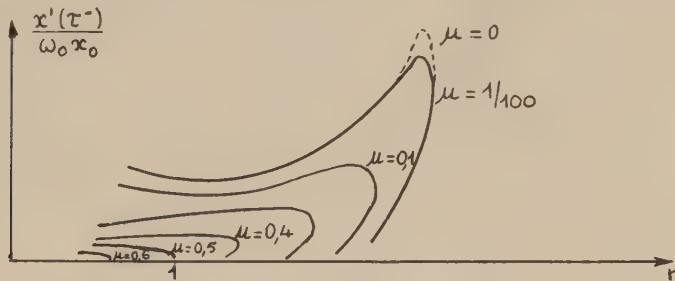


fig. 3.4

Nous pouvons en déduire les caractéristiques essentielles suivantes :

- [3.4.3.1] Le mouvement est régulier si, et seulement si, le nombre de cycles décrits par l'excitation, entre deux percussions consécutives, est un entier.
- [3.4.3.2] Les écarts entre les vitesses réduites de percussion des systèmes sans amortissement et faiblement amortis ($\mu \neq 1/100$) sont très sensibles au voisinage de la vitesse maximum de percussion.
- [3.4.3.3] Quand le coefficient d'amortissement μ croît :
la vitesse de percussion ,
la plage des r , à l'intérieur de laquelle le mouvement est régulier ,
la valeur $r = r_d$ de décrochement,
la valeur $r = r_m$ pour laquelle la vitesse de percussion est maximum,
décroissent sensiblement .
- [3.4.3.4] Pour certaines valeurs des paramètres du système et, notamment, du coefficient d'amortissement, la vitesse de percussion maximum peut se situer dans une plage où l'accrochage est automatique .

Ex : $\frac{x_0}{d} = 1 / R = 0,75 / N = 1 / \mu = 0,6$
Dans ce cas, la valeur de $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}$ est unique quel que soit r
- [3.4.3.5] Pour certaines valeurs des paramètres, la vitesse de percussion peut rester sensiblement constante et voisine du maximum, quand r varie légèrement .

Ex : $\frac{x_0}{d} = 1 / R = 0,75 / N = 1 / \mu = 0,3$
 $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} \neq 0,98$ quand $0,85 \leq r \leq 1,15$

[3.4.3.6] A $N, R, \frac{x_0}{d}$ constants, les cycles obtenus dans le plan $\left[\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}, r \right]$ diffèrent suivant les valeurs du coefficient μ .

Ex : 1^{er} cas (fig. 3.5) $N = 1$, μ faible.



fig.3.5

Nous retrouvons le type de cycles du système non amorti, avec accrochage automatique ou non suivant les valeurs de r

2^{ème} cas (fig. 3.6) $N = 1$, μ élevé ($\mu \geq 0,4$ pour

$$R = 0,75 \quad \frac{x_0}{d} = 1)$$

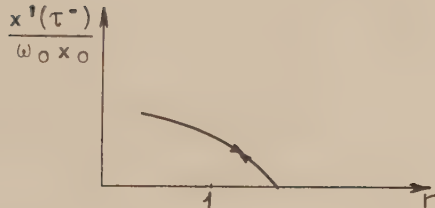


fig. 3.6

l'accrochage est toujours automatique

3.5 Remarque sur la stabilité du mouvement

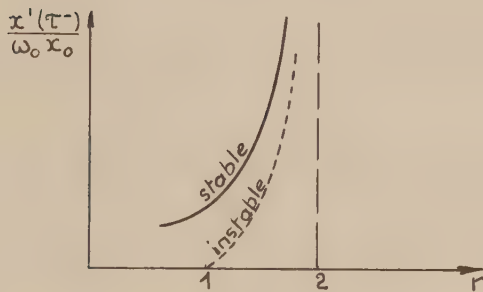


fig. 3.7

Dans le cas particulier de percussions parfaitement élastiques, c'est-à-dire pour un coefficient de restitution de vitesse unité, J.A. SPARENBERG a montré que le mouvement est toujours stable, sauf pour les valeurs correspondant à la vitesse réduite la plus faible lorsque celle-ci possède deux déterminations (cf. fig. 3-7)

3.6 Variation de la vitesse de percussion maximum en fonction de l'interstice réel (cas du système non amorti)

Les variations de la vitesse réduite de percussion $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}$ en fonction des paramètres $r, N, R, \frac{x_0}{d}$ se déterminent à partir de l'expression générale [1.4.4.7]

Pour les valeurs numériques retenues (avec $\frac{x_0}{d} > 0$, $N = 1$, $R \neq 1$) la vitesse réduite de percussion maximum est obtenue pour $\frac{x_0}{d} = 0,5$. Il serait erroné d'en déduire que la vitesse de percussion maximum $x'(\tau)$ est obtenue pour cette même valeur de $\frac{x_0}{d}$:

Pour un système donné et un niveau d'énergie fixé, d et ω_0 sont constants. La vitesse de percussion maximum, au coefficient $\frac{1}{\omega_0}$ près, s'écrit :

$$\left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0} \right]_{\max} = x_0 \left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} \right]_{\max}$$

Elle est fonction de l'interstice réel et de la vitesse réduite de percussion maximum $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$.

x_0 peut être déduit de la relation :

$$\frac{x_0}{d} = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = 0,5/1/2/5/10$$

$$\text{en posant } d=1 \quad x_0 = 0,5/1/2/5/10$$

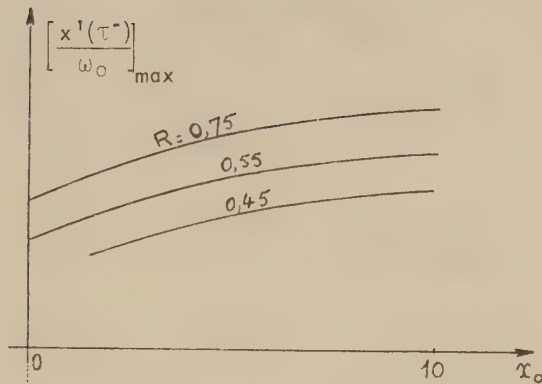


fig. 3-8

Nous pouvons tracer le graphe de $\left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0} \right] = f(x_0)$ (diag.3,19)

Nous en déduisons :

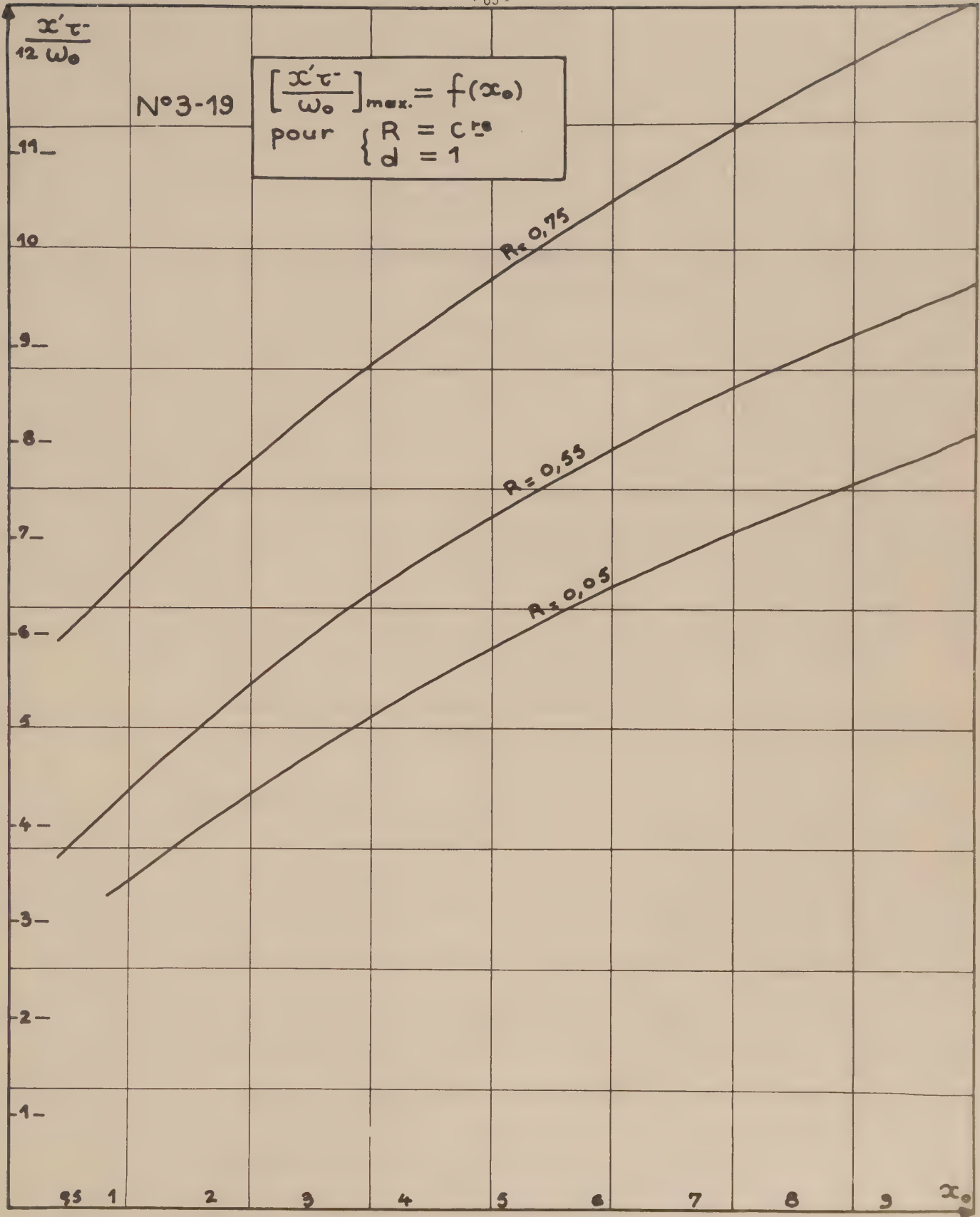
« La vitesse de percussion maximum croît avec x_0 (fig.3-8) quand x_0 croît de 0 à 10. »

Pour x_0 , R , N fixés, les maxima respectifs des vitesses de percussion (réduites ou non) ont lieu pour une même valeur de r . Toute variation de x_0 nécessite l'ajustement de la fréquence d'excitation pour obtenir, à nouveau, la vitesse de percussion maximum.

En conclusion, pour un système donné possédant un niveau d'énergie constant, le réglage de la vitesse de percussion à sa valeur optimum, implique :

- ▲ la connaissance du coefficient de restitution de vitesse R qui dépend notamment de la nature des matériaux constituant le percuteur et la butée,
- ▲ le choix de x_0 d'après le graphe de la fonction $\left[\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0} \right]_{\max} = f(x_0)$ et les caractéristiques mécaniques du système.
Il en résulte la valeur de $\frac{x_0}{d}$.
- ▲ la détermination de la fréquence d'excitation f_m telle que $r_m = \frac{f_m}{f_0} = \frac{\omega_m}{\omega_0}$, r_m étant l'abscisse, sur le graphe de la fonction $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = f(r)$, de la vitesse réduite de percussion maximum.

NOTA - Toute variation de R entraîne une modification du réglage et principalement du paramètre r_m .



CHAPITRE 4

DISPOSITIF EXPERIMENTAL

4 - 1 But

Le dispositif expérimental envisagé doit permettre la vérification des théories exposées aux chapitres précédents .

Pour répondre à ce but, il devra satisfaire, aussi parfaitement que possible, aux conditions suivantes :

- ▲ vérification des hypothèses ,
- ▲ variation, dans une plage suffisamment étendue, des différents paramètres (notamment r et $\frac{d}{x_0}$
- ▲ maximum de sensibilité et de précision des appareils de lecture,
- ▲ réglage aisé et précis des paramètres .

4 - 2 Dispositif expérimental

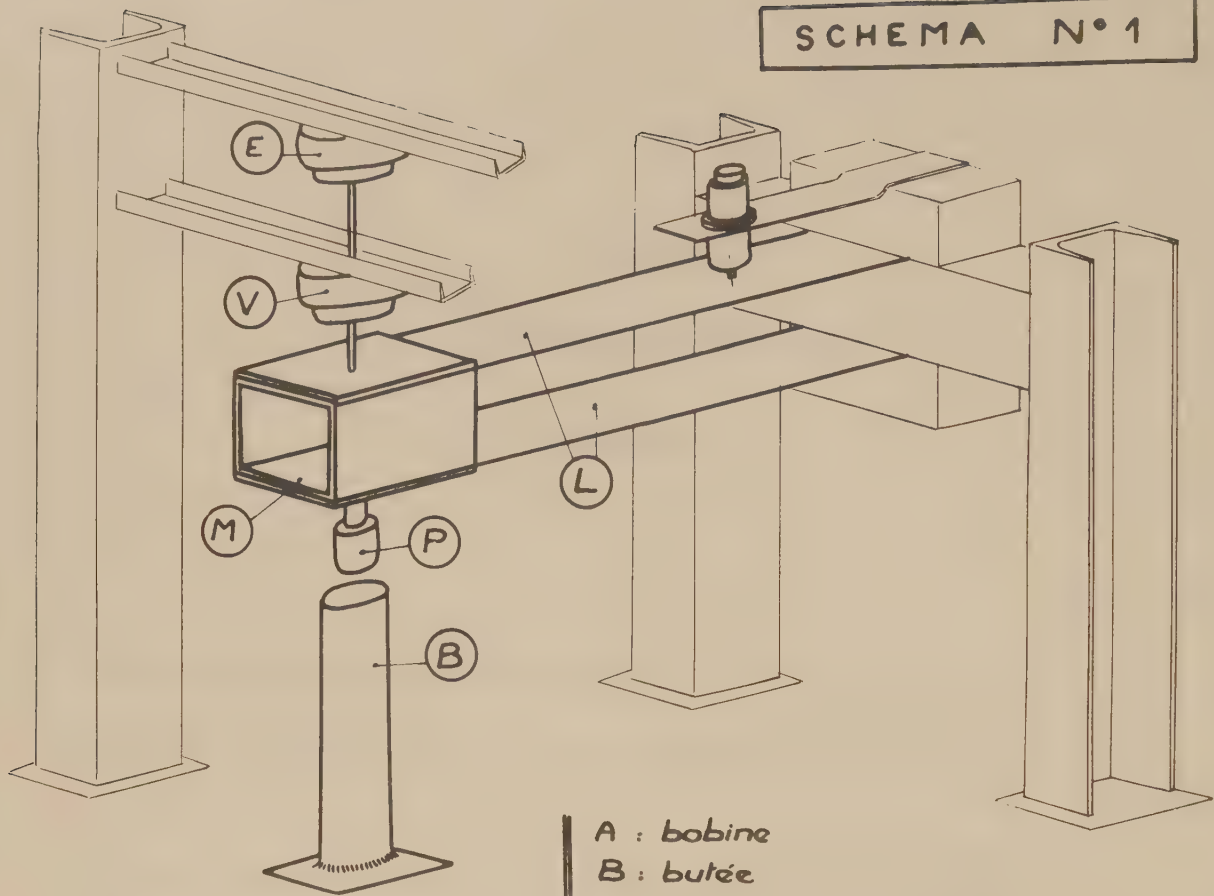
4.2.1. Montage mécanique

4-2.1.1 - Généralités

Le montage mécanique, représenté sur le schéma n° 1 se compose de :

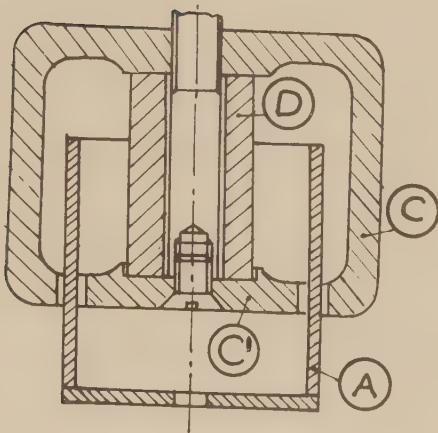
- ▲ Deux lames L identiques, parallèles, en acier à ressort et encastrées à l'une de leurs extrémités ;
- ▲ d'une masse M , reliant les extrémités libres des lames, solidaire de la bobine d'excitation et de celle du capteur vitesse ;
- ▲ d'un percuteur P , fixé sur la masse M et dont la partie libre se termine en forme de demi-sphère ;
- ▲ d'une butée B , fixe, en acier .
- ▲ d'une structure, en forme de portique, supportant les pots de l'excitateur et du capteur vitesse :

SCHEMA N° 1

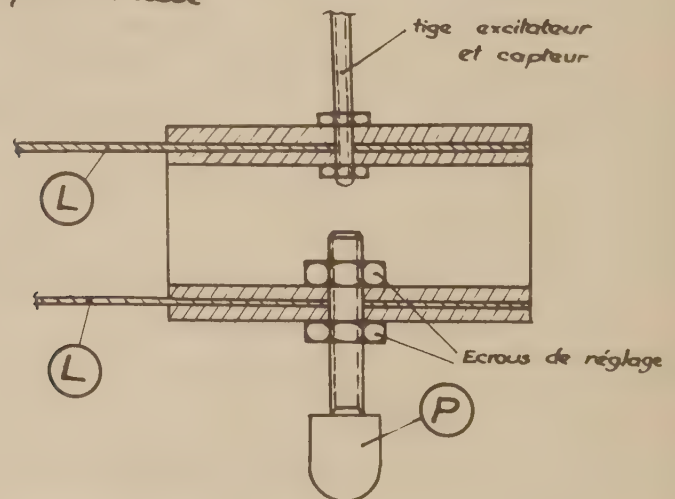


- A : bobine
 B : butée
 C : armature en fer doux
 D : aimant permanent
 E : exciteur
 L : lame de ressort
 M : masse
 P : percuteur
 V : capteur vitesse

détail a



détail b



4. 2.1.2 - Caractéristiques techniques :

● réglage de x_0

La distance x_0 , au repos, du percuteur à la butée, est variable : le positionnement du percuteur P étant assuré par deux écrous (cf détail de la masse, schéma n° 1 - détail b)

● positions respectives de l'excitateur, du capteur de vitesse et du percuteur

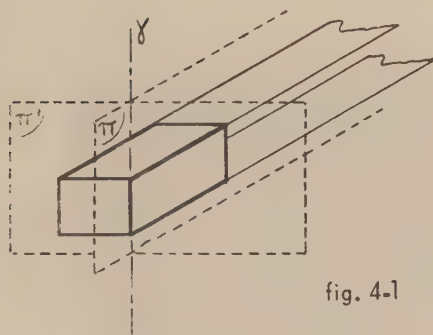


fig. 4-1

La masse M est symétrique par rapport :

- au plan π normal aux lames et passant par l'axe de symétrie longitudinal de celles-ci ;
- au plan π' normal aux lames et à leur axe de symétrie longitudinal .

L'intersection de ces deux plans donne la position de l'axe vertical γ sur lequel sont centrés : le percuteur, l'excitateur et le capteur vitesse (cf fig. 4.1) .

Ainsi, à la percussion, il ne peut se produire aucun couple autour du point de contact percuteur-butée .

● déplacement du percuteur :

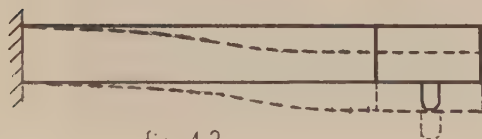


fig. 4-2

Le principe des deux lames parallèles encastrées à chaque extrémité assure un déplacement vertical du percuteur (cf fig. 4-2)

4. 2.2 Circuit d'excitation

4.2.2.1. Principe de l'excitateur (cf schéma n° 1 - détail a)

L'excitateur est constitué par une bobine (A) dont un certain nombre de spires se trouve dans le champ d'un aimant permanent (B), le flux de ce dernier étant canalisé par une armature en fer doux (C-C)

Quand la bobine est parcourue par un courant sinusoïdal, d'amplitude I , la force développée par l'excitateur est sinusoïdale, de même pulsation ω que le courant et d'amplitude E proportionnelle à I :

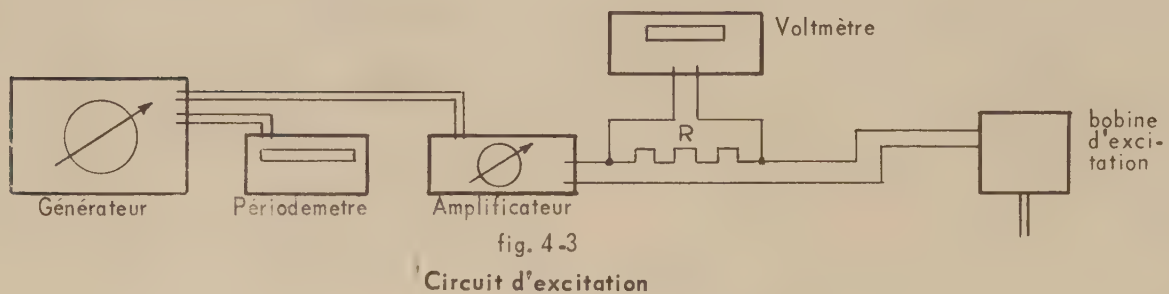
$$E = K_1 I \quad \text{avec } K_1 \text{ constant}$$

Ainsi, pour appliquer une force d'amplitude constante au système vibrant, il suffit de maintenir un courant excitateur constant, quelle que soit la pulsation ω de celui-ci .

4.2.2.2 Circuit d'excitation (cf fig. 4-3)

Ce circuit d'excitation comprend :

- ▲ un exciteur (type PRODERA)
- ▲ un générateur de signaux sinusoïdaux de fréquence variable (PHILIPS)
- ▲ un amplificateur continu (PRODERA 20 WA 50/D)
- ▲ un voltmètre électronique (PHILIPS GM 6012)
- ▲ une résistance R
- ▲ un périodemètre (ROCHAR A 1211)



Le voltmètre électronique, branché aux bornes de la résistance R, permet de connaître l'intensité efficace du courant parcourant la bobine excitatrice, à partir de 2 Hz.

Le périodemètre indique avec précision (à 10^{-4} seconde près sur 10 périodes) la période de l'excitation.

L'amplificateur continu augmente la puissance de sortie du générateur et débite un courant réglable mais constant, quelle que soit la fréquence du signal émis.

4.2.3 Circuit de vitesse

4.2.3.1. Principe du capteur vitesse

la conception du capteur vitesse est analogue à celle de l'excitateur avec, cependant, un fil de bobinage plus fin en général.

La variation de flux, lors du mouvement, crée une différence de potentiel V , aux bornes de la bobine, proportionnelle à la vitesse instantanée v de celle-ci

$$v = K_2 V$$

avec K_2 constant

Un étalonnage préalable détermine la valeur du coefficient K . Il suffit ensuite de connaître V pour en déduire, à chaque instant, la vitesse du percuteur

4.2.3.2 Perturbation du signal de la vitesse .

L'étude théorique met en évidence que la vitesse du percuteur, entre deux percussions consécutives, est la superposition de deux sinusoïdes de pulsations respectives ω_0 et ω .

Or, si nous regardons le signal de la vitesse obtenu à l'oscillographe (cf photo 4.1) celui-ci ne semble pas vérifier la théorie : il apparaît, en effet, en plus des deux sinusoïdes de pulsations ω_0 et ω , une perturbation de forme sinusoïdale amortie, particulièrement importante après chaque percussion.

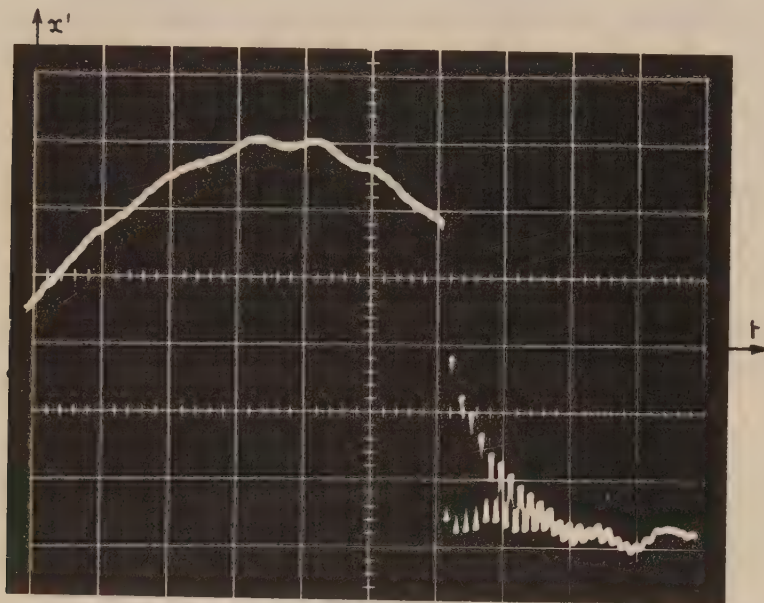


Photo 4-1

Cette contradiction entre les signaux de vitesse théorique et expérimental n'est, en fait, qu'apparente :

Une percussion excite toute structure à sa fréquence propre; les vibrations qui en résultent sont plus ou moins importantes selon l'intensité du choc, les raideurs et l'importance des masses excitées, l'emplacement de la percussion, etc ...

Dans notre cas, la percussion excite le système vibrant à la pulsation ω_0 (ce qui correspond à la théorie établie) mais également les différentes parties du montage mécanique et, en particulier, les lames doublement encastrées composant le ressort . Ces lames possèdent une fréquence propre de 1600 Hz environ et transmettent les vibrations correspondantes à la masse en mouvement, ce qui explique la perturbation enregistrée sur le signal de vitesse .

Remarquons que la perturbation du mouvement du percuteur est, par contre, très faible : pour des mouvements sinusoïdaux, l'amplitude de la vitesse s'écrit ωx_a (ω pulsation d'excitation ,

x_a amplitude du mouvement), ce qui se traduit, pour une même amplitude de la vitesse, par des déplacements inversement proportionnels aux fréquences d'excitation.

Notons, pour conclure, que la mesure de $x'(\tau^-)$ n'est pas modifiée par la perturbation due aux lames, car cette dernière s'amortit très rapidement et est pratiquement négligeable avant chaque percussion.

4. 2. 3. 3 Elimination de la perturbation

L'élimination du signal parasite est réalisée à l'aide d'un filtre en double T ponté (fig. 4-4)

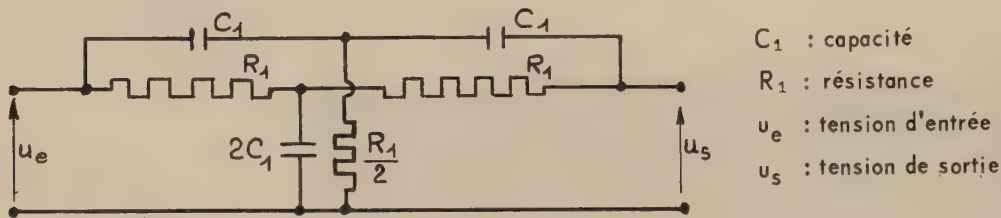


fig. 4.4

La fréquence théorique de coupure d'un tel filtre est :

$$f_d = \frac{1}{2 \pi R_1 C_1}$$

Connaissant la fréquence des vibrations parasites à annuler, il est aisé d'en déduire le produit $R_1 C_1$.

Le gain s'exprime par :

$$|K| = \left| \frac{u_e}{u_s} \right| = \frac{1 - R_1^2 C_1^2 \omega^2}{\sqrt{1 + 14 R_1^2 C_1^2 + R_1^4 C_1^4 \omega^4}}$$

et le déphasage entre les tensions d'entrée et de sortie :

$$\theta = - \text{Arc tg} \frac{4 R_1 C_1 \omega}{1 - R_1^2 C_1^2 \omega^2}$$

Les diagrammes n° 4-1 et 4-2 représentent respectivement les variations expérimentales de K et de θ en fonction de la fréquence f du signal d'entrée, pour :

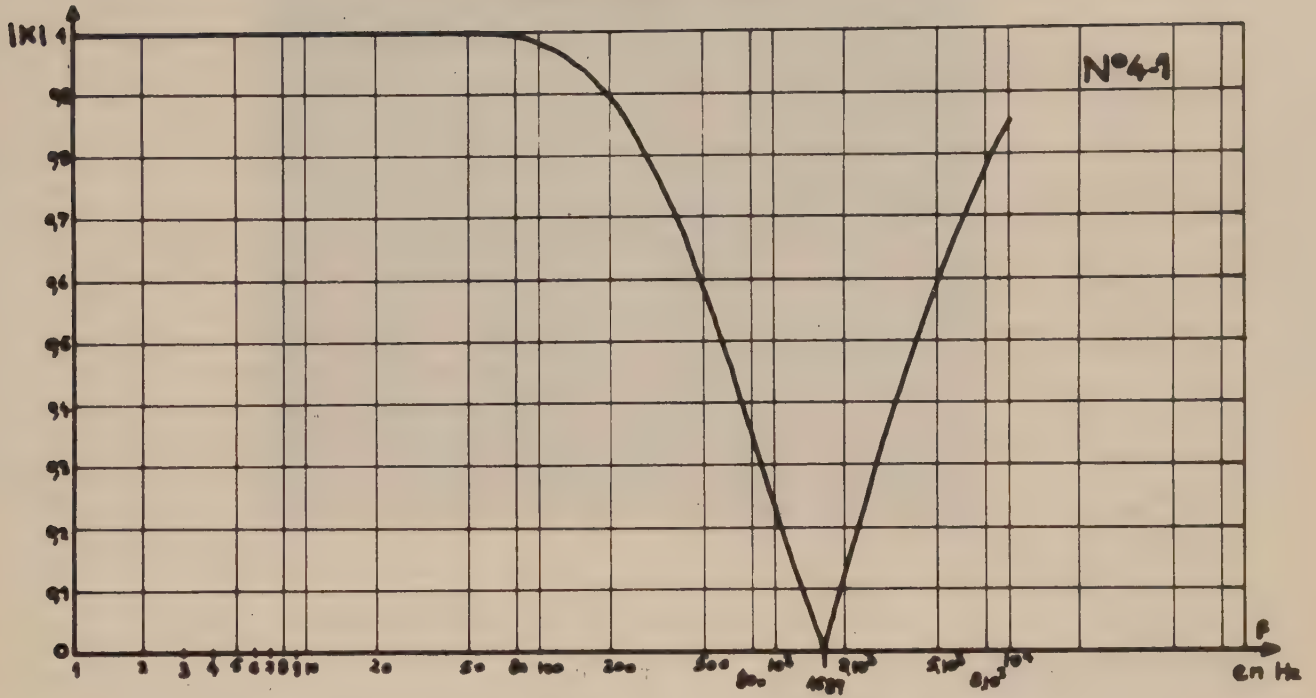
$$f_d = 1587 \text{ Hz} \quad \text{avec} \quad R_1 = 1000 \Omega$$

$$C_1 = 0,1 \mu F$$

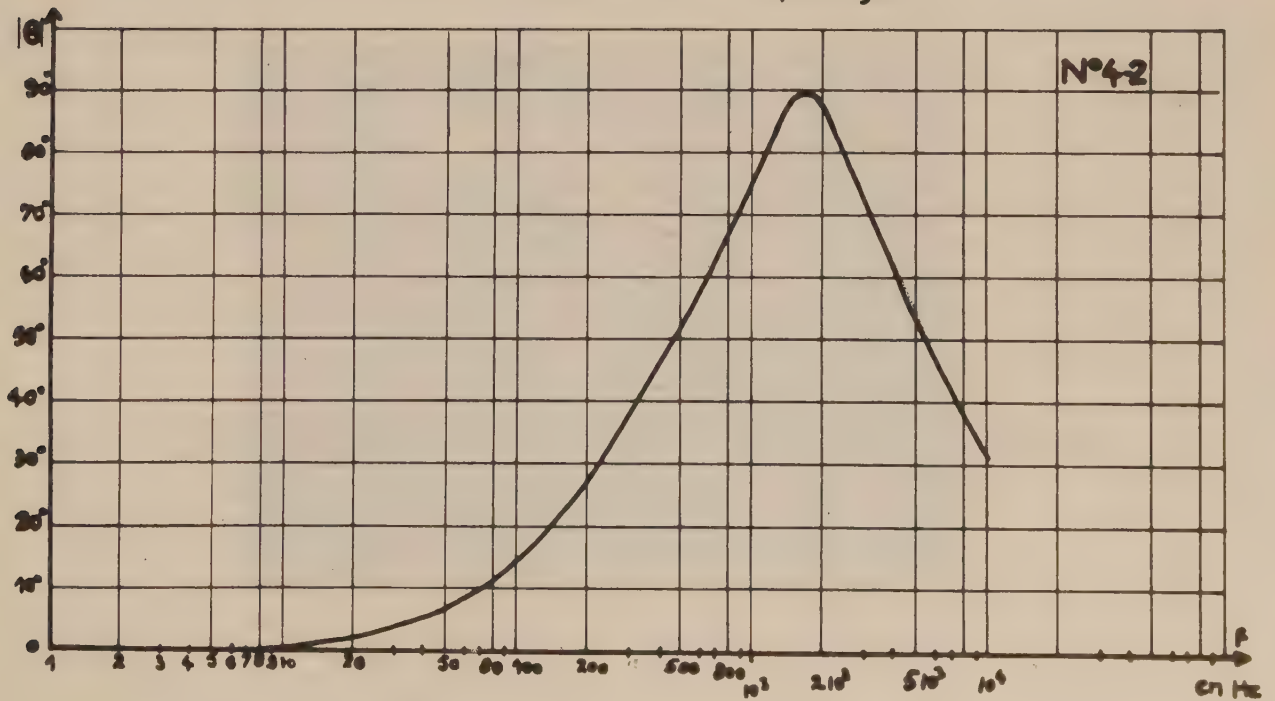
Le gain K peut être considéré comme constant pour les fréquences inférieures à 60 Hz, ce qui définit le domaine de validité du balayage en fréquence.

Par contre, le déphasage θ entraîne une erreur non négligeable sur le signal de vitesse - celui-ci dépendant de la pulsation ω_0 constante et de la pulsation d'excitation ω - dès que le rapport $r = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ est supérieur à 2.

FILTRE SEUL GAIN



FILTRE SEUL Déphasage θ



Il est possible de remédier à cet inconvénient en utilisant un pont déphaseur (cf fig.4-5) monté en série avec le filtre double T .

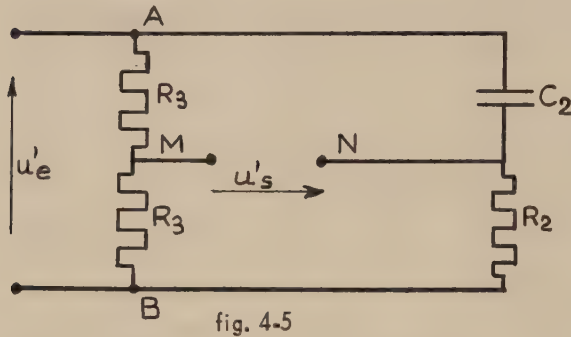


fig. 4-5

R_2, R_3 : résistances

C_2 : capacité

u_e' : tension d'entrée

u_s' : tension de sortie

I : amplitude du courant sinusoïdal de pulsation ω

Le diagramme vectoriel d'un tel pont (cf fig. 4-6) montre :

$$\frac{u_s'}{u_e'} = \frac{1}{2}, \text{ en modules}$$

$$\theta' = \frac{2 R_2 C_2 \omega}{1 - R_2^2 C_2^2 \omega^2}$$

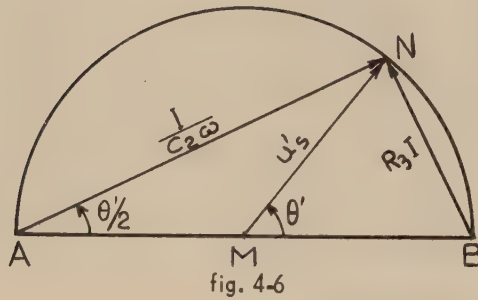


fig. 4-6

En choisissant judicieusement $R_2 C_2$, il est aisé de réduire, sinon d'annuler, le déphasage θ du filtre double T

(Les photographies (4-2) et (4-3) illustrent l'efficacité du filtre double T)

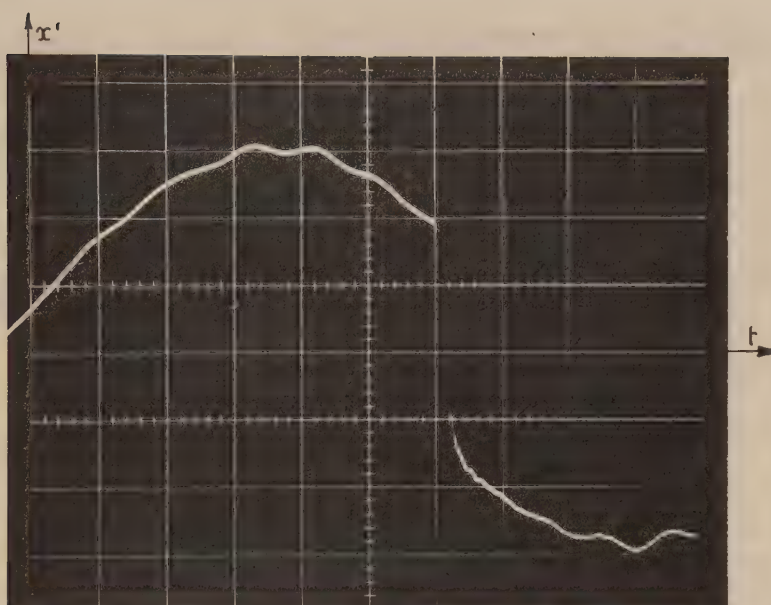


Photo 4 - 2
Capteur vitesse équipé du filtre

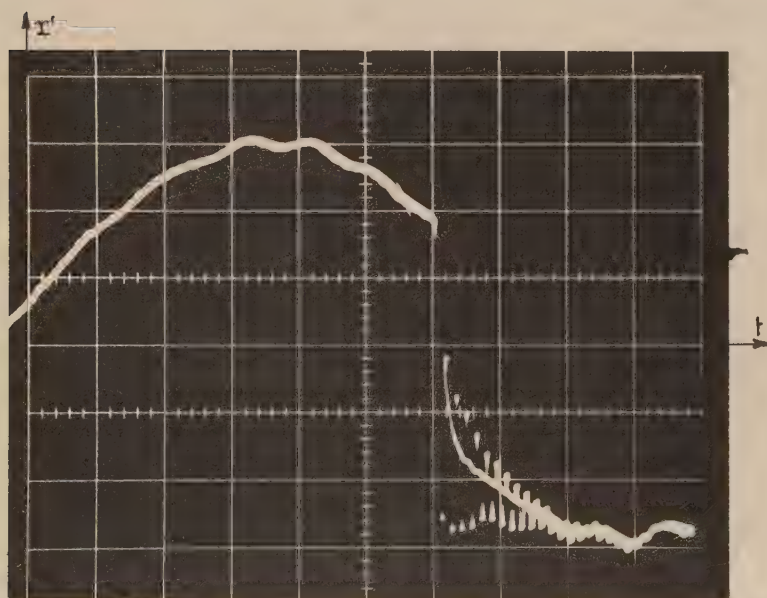


Photo 4 - 3
Superposition des signaux vitesse : avec et sans filtre

4-2-3-4 Circuit de mesure de la vitesse .

Le circuit de mesure de la vitesse (cf fig. 4-7) comporte :

- ▲ un capteur de vitesse type PRODERA
- ▲ un filtre double T } éventuellement
- ▲ un pont déphaseur }
- ▲ un oscilloscope cathodique équipé d'un appareil POLAROID (TEKTRONIX DUAL BEAM 502 A)
- ▲ une commande externe de déclenchement automatique du spot

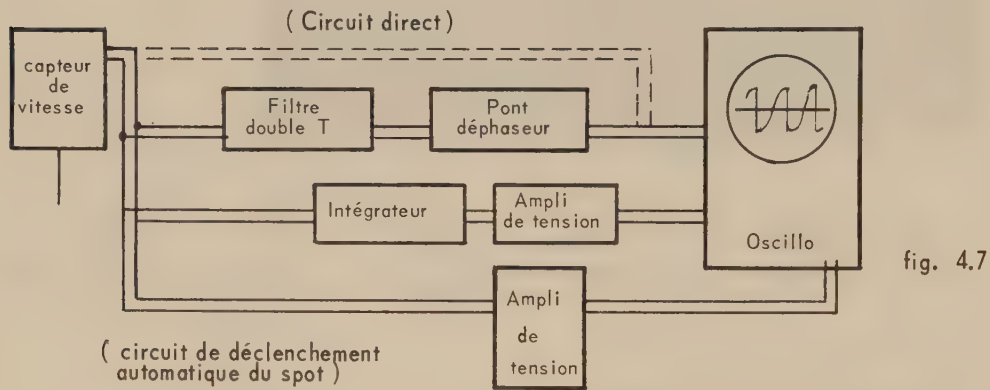


fig. 4.7

Circuit de mesure de la vitesse

La commande externe du déclenchement automatique du spot de l'oscillographe est réalisée en prélevant une partie du signal à la sortie du capteur vitesse et en l'amplifiant à l'aide d'un amplificateur de tension (ROCHAR - A 1338)

4.2.4 Circuit intégrateur

Pour l'étude des cycles limites, il nous sera indispensable d'intégrer le signal vitesse; nous utiliserons, pour cela, un intégrateur classique RC (fig. 4.8)

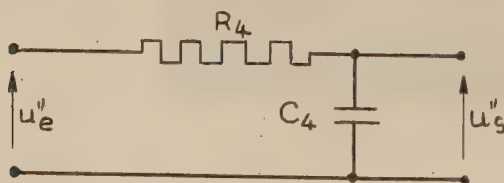


fig. 4.8

- R_4 : résistance
- C_4 : capacité
- u_e'' : tension d'entrée
- u_s'' : tension de sortie

La relation qui lie u_e'' et u_s'' est :

$$u_s'' = \frac{1}{R_4 C_4} \int u_e'' dt \quad \text{valable si}$$

la tension d'entrée est très supérieure à la tension de sortie, ce qui impose que le produit RC soit grand .
Le signal u_s'' étant, par suite, très faible, il est nécessaire de l'amplifier .

L'intégrateur se place en dérivation, à la sortie du capteur vitesse (cf. fig. 4-7) et le signal intégré est injecté sur la deuxième voie de l'oscillographe .

4-3 Vérification des hypothèses -

L'étude théorique est basée sur certaines hypothèses (cf chapitre 1 , par. 1)

Analysons chacune de ces hypothèses pour savoir si elle est vérifiée par le dispositif expérimental envisagé .

4.3.1 Le système vibrant n'est pas amorti

Tout système mécanique soumis à un mouvement vibratoire est amorti plus ou moins .

4.3.1-1 Mesure de l'amortissement .

Les forces d'amortissement sont supposées proportionnelles à la vitesse de la masse .

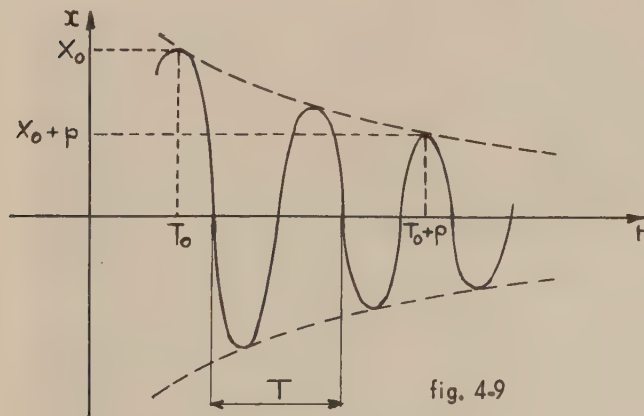
La mise en équation du système entraîne la définition d'un coefficient d'amortissement μ (cf. chapitre 2 par. 2)

$$\mu = \frac{b}{2m\omega_0}$$

Pour mesurer le coefficient μ nous disposons de plusieurs méthodes . Nous en retiendrons deux :

1ère méthode :

Le système vibrant est déplacé de sa position d'équilibre, puis lâché : le mouvement correspondant - sinusoïdal amorti - est enregistré (cf photo 4.2)



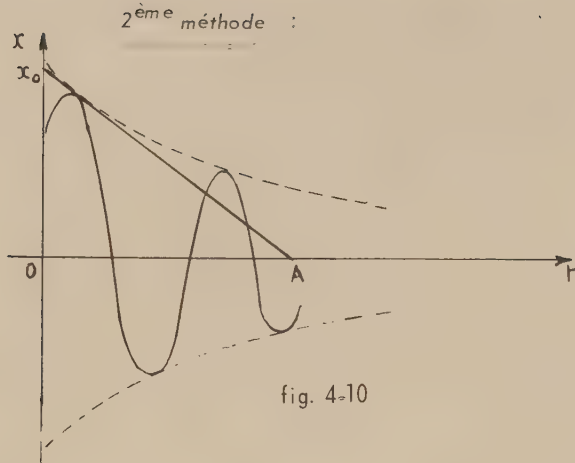
Appelons :

- X_0 et X_{0+p} deux amplitudes du mouvement, l'une (X_0) servant de référence, l'autre (X_{0+p}) obtenue à la p-ième période (cf fig. 4.9)
- T la période d'une oscillation libre amortie .

Le coefficient μ s'exprime alors par la relation :

$$\mu = \frac{1}{\omega_0 p T} \text{Log} \frac{X_0}{X_{0+p}}$$

d'où il est aisé de déduire μ connaissant X_0 , X_{0+p} , p , T et ω_0 .



Considérons la tangente à l'une des courbes enveloppes du mouvement (cf fig. 4.10) au point d'abscisse $t=0$.

Soit $\overline{OA} = T''$.

Il vient :

$$\mu = \frac{1}{T''} \cdot \frac{1}{(\omega)_0}$$

4.3.1.2 Résultats :

La photographie (4.4) représente l'enregistrement des oscillations libres du système adopté

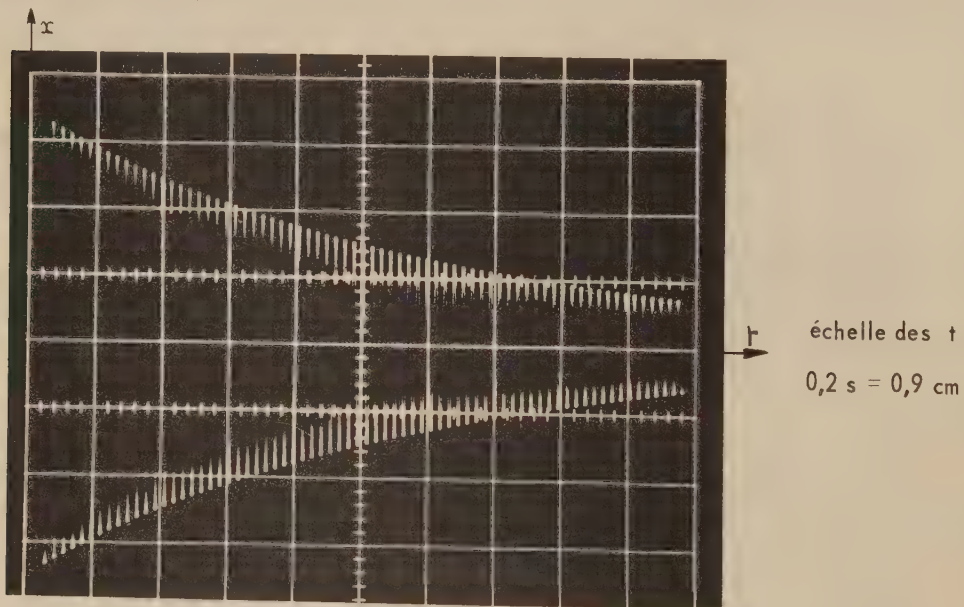


photo 4.4

Résultats : 1^{ère} méthode $\mu = 0,89/100$

2^{ème} méthode $\mu = 0,95/100$

L'amortissement existe, mais, étant très faible, nous pouvons le négliger en première approximation.

4.3.2 Le ressort de raideur k est parfaitement linéaire et de masse négligeable .

Cette hypothèse est purement théorique car le ressort n'a jamais tout à fait une masse négligeable .

Physiquement, il faut que l'ensemble du système vibrant (ressort -percuteur) soit linéaire ce qui signifie que le déplacement x , en régime forcé sinusoïdal, vérifie la relation :

$$x = \frac{d}{1-r^2} \cos \omega t$$

Soient I_1 et I_2 les courants traversant l'excitateur et x_1 et x_2 les déplacements respectifs correspondants du percuteur (r restant constant) .

Nous contrôlons que :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

et ceci, quelles que soient les valeurs de I et de r .

4.3.3 La percussion est instantanée :

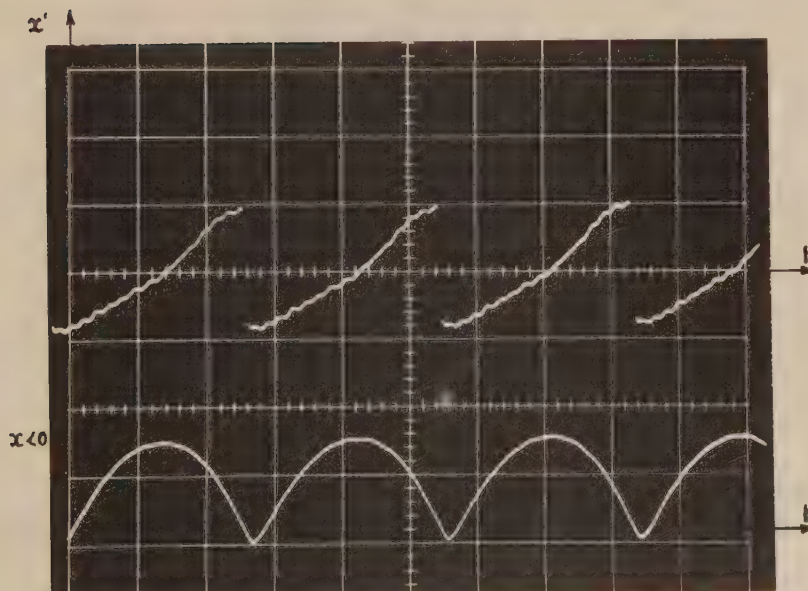
Nous pouvons considérer la percussion comme instantanée : il suffit, pour s'en assurer, de regarder les photographies du signal de vitesse (cf. photo 4.4 par exemple)

4.3.4 La force sinusoïdale est appliquée sur l'axe passant par le centre de gravité de la masse m et le point de percussion

Cette condition est réalisée par le montage mécanique décrit (cf par. 4.2.1.2)

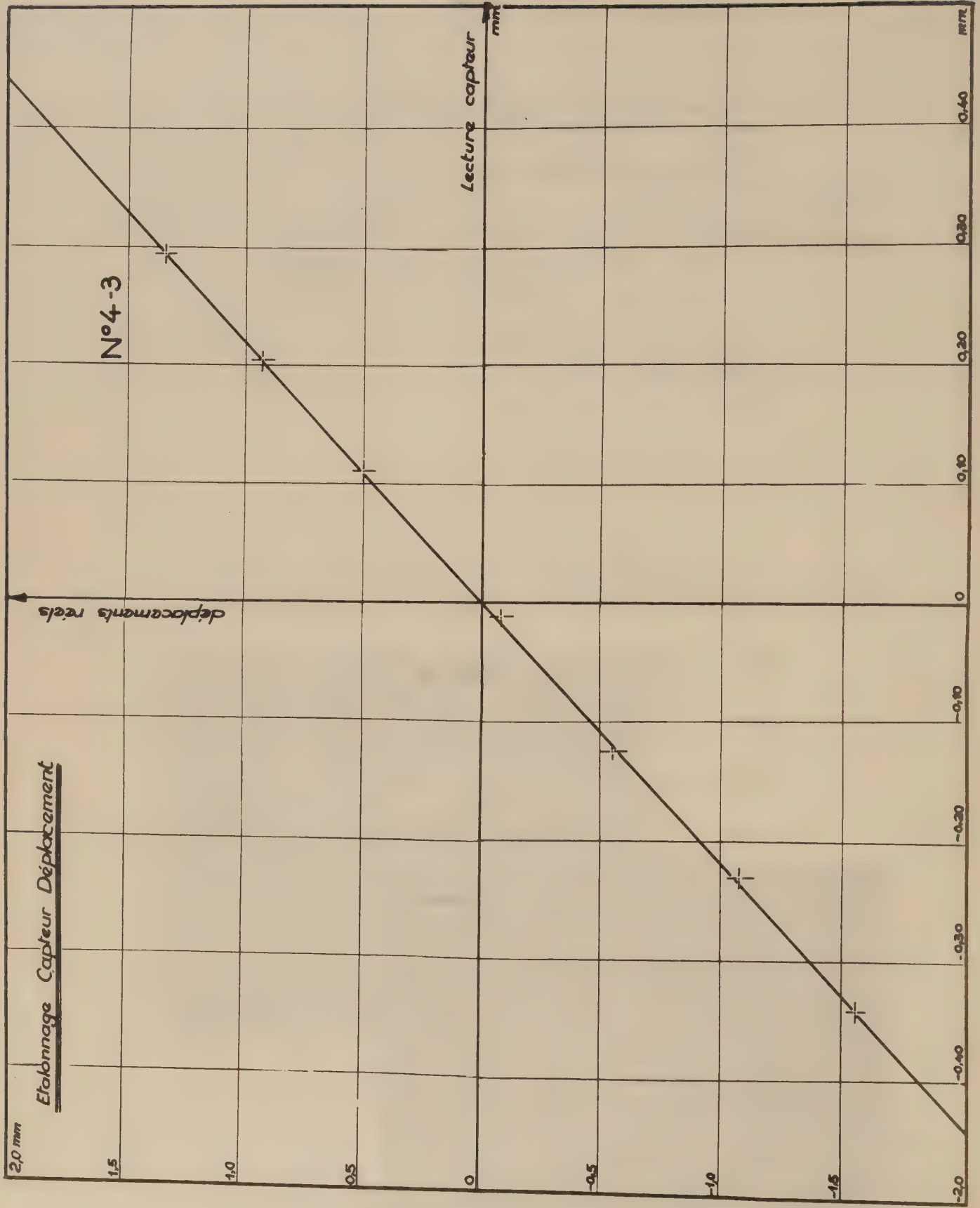
4.3.5 Le mouvement du percuteur est continu

Cette hypothèse est parfaitement vérifiée .



La photographie ci-contre représente, pour un cas quelconque, le signal de vitesse (partie supérieure) et le déplacement correspondant du percuteur (partie inférieure) Ce dernier est bien continu.

photo 4-5



4,4 Réglages et mesures

4.4.1 Mesure du déplacement x du percuteur

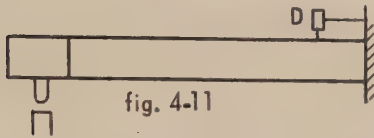


fig. 4-11

Le déplacement du percuteur est déterminé à l'aide d'un capteur de déplacement D muni d'un pont de mesure (PHILIPS PR 9300) placé près de l'encastrement fixe des lames de ressort (cf fig 4-11)

Un étalonnage préalable est nécessaire pour connaître la relation qui lie les déplacements respectifs des percuteur et capteur (cf diagramme n° 4 - 3) .

L'emploi du capteur est limité à la mesure de x_0 et des amplitudes du déplacement en régime forcé et sans percussion (tracé des courbes de résonance) .

4.4.2 Mesure de la pulsation propre ω_0 du système

La valeur de ω_0 est déduite directement de la mesure de la résonance, l'amortissement étant négligeable ($\Omega \neq \omega_0$) :

$$\omega_0 = 93,73 \text{ rad/s} \cdot T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 67 \text{ millisecondes}$$

4.4.3 Mesure du coefficient d'amortissement μ

Pour mémoire (cf par. 4-3-1-1)

4.4.4 Règlage de r

$$\text{Par définition } r = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = \frac{T_0}{T}$$

avec respectivement :

ω_0 , f_0 , T_0 pulsation, fréquence et période propre du système

ω , f , T « « « d'excitation

De la valeur désirée pour r , nous en déduisons la période T , de l'excitation, à obtenir. Le réglage de T s'effectue alors à l'aide du générateur de fréquence, sa valeur étant lue avec précision au périodemètre.

4.4.5 Règlage de $\frac{x_0}{d}$

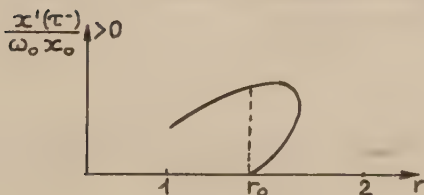


fig. 4-12

- $\frac{x_0}{d}$ positif

Pour r supérieur à 1, il existe une valeur $r=r_0$ telle que

$\frac{x'(\tau_0)}{\omega_0 x_0}$ possède une solu-

tion double : nulle d'une part, positive d'autre part (cf fig 4-12)

La théorie montre, pour un amortissement nul, que :

$$r_0 = \sqrt{1 + \frac{d}{x_0}}$$

Nous procéderons, pour régler $\frac{x_0}{d}$ à la valeur désirée, comme suit :

- calcul de r_0
- réglage de la période T d'excitation telle que $r=r_0$
- augmentation progressive et lente de l'intensité I du courant traversant la bobine excitatrice (ce qui correspond à une croissance de d) jusqu'à l'obtention de la percussion .

Le réglage de $\frac{x_0}{d}$ est ainsi terminé . En effet, dès que l'intensité I est suffisante, la relation $r_0 = \sqrt{1 + \frac{d}{x_0}}$ est vérifiée : le régime stable de la percussion correspond à la valeur positive et non nulle de $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}$

- $\frac{x_0}{d}$ négatif

Soit $\frac{x_0}{d} = -a$ avec $a > 0$

Nous procédons à la détermination de l'intensité I du courant qui doit parcourir la bobine excitatrice pour que $\frac{x_0}{d} = a$ (voir réglage de $\frac{x_0}{d}$ positif)

Connaissant $x_0 = \alpha$ positif, à l'aide du capteur de déplacement, nous réglons la distance du percuteur à la butée telle que $x_0 = -\alpha$.

Nous obtenons $\frac{x_0}{d} = -a$

4.4.6 Mesure de la vitesse de percussion $x'(\tau^-)$

4-4-6-1 Etalonnage du capteur vitesse

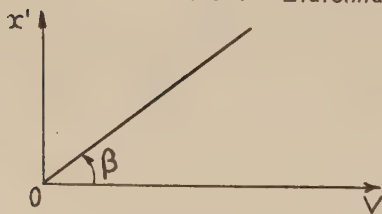


fig. 4-13

Soit :

Il s'agit de trouver la relation qui lie la vitesse du percuteur à la valeur de la différence de potentiel (d.d.p.) V correspondante, relevée aux bornes du capteur vitesse .

L'étalonnage s'effectue en régime sinusoïdal forcé, sans percussion .

• x_a l'amplitude des oscillations forcées du système pour une pulsation excitatrice ω .
L'amplitude de la vitesse du percuteur est alors $x' = \omega x_a$.

- V l'amplitude de la d.d.p. aux bornes du capteur .

Le graphe de la fonction $x' = f(V)$ est une droite (cf fig. 4-13)

Pour le capteur vitesse retenu, nous trouvons :

$$\operatorname{tg} \beta = 0,207 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x' \text{ exprimé en millimètres par seconde} \\ V \text{ exprimé en millivolts} \end{cases}$$

La mesure de $x'(\tau^*)$ est alors immédiate :

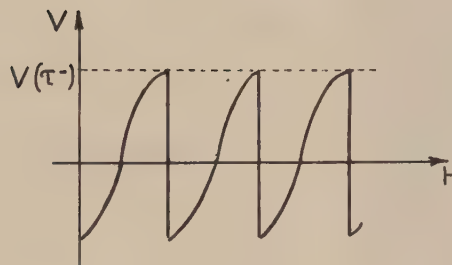


fig. 4.14

Soit $V(\tau^*)$ la d.d.p. aux bornes du capteur, immédiatement avec percussion (cf fig. 4-14)

$$x'(\tau^*) = \operatorname{tg} \beta \cdot V(\tau^*)$$

ω_0 et x_0 étant connus, nous en déduisons la valeur du rapport $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$

4-4-6-2 Autre méthode de détermination de $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$

A la valeur $r = r_0$ (cf par. 4-4-5) correspond une pulsation d'excitation $\omega = \omega_a$ bien précise . L'amplitude de la vitesse du percuteur, juste avant accrochage, est :

$$x' = \omega_a x_0$$

Soit V_a l'amplitude de la d.d.p. correspondant aux bornes du capteur :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega_a x_0}{V_a}$$

En remplaçant, dans l'expression $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{\operatorname{tg} \beta V(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$, $\operatorname{tg} \beta$ par sa valeur, il

vient :

$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = \frac{\omega_a}{\omega_0} \frac{V(\tau^*)}{V_a}$$

Or : $\frac{\omega_a}{\omega_0} = r_0$ d'où :

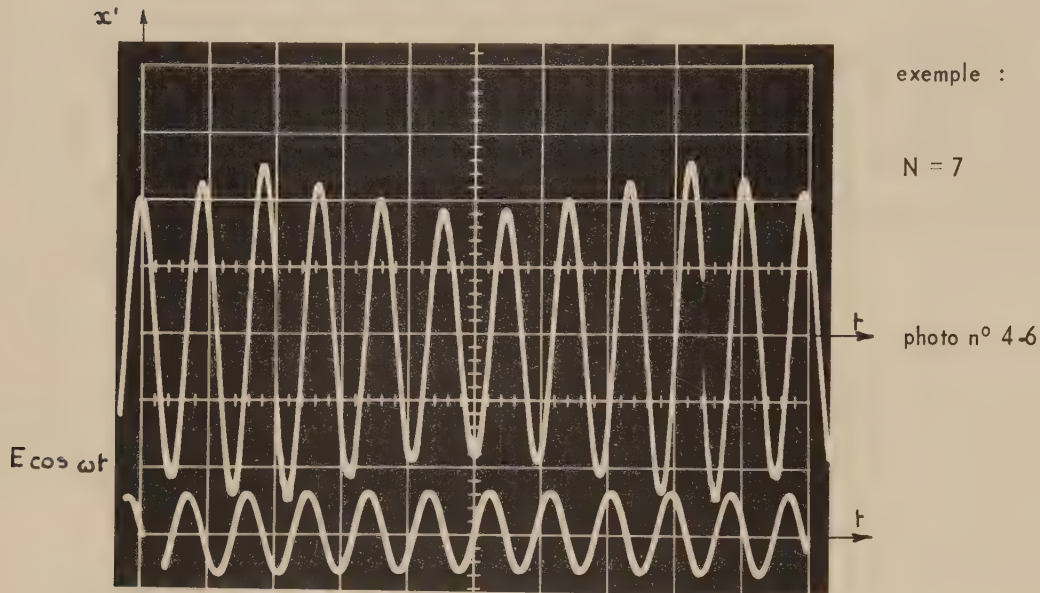
$$\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0} = r_0 \frac{V(\tau^*)}{V_a}$$

REMARQUE • Pour $\frac{x_0}{d}$ positif, nous utiliserons la deuxième méthode exposée pour déterminer le rapport $\frac{x'(\tau^*)}{\omega_0 x_0}$ (x_0 n'apparaissant pas dans les mesures, la précision se trouve améliorée)
Pour $\frac{x_0}{d}$ négatif, seule la première méthode est applicable .

- Les mesures relatives à la vitesse de percussion seront faites à l'aide du circuit vitesse non équipé de filtre et de pont de déphaseur, pour éviter tout déphasage parasite.

4.4.7 Mesure de N

Sur la deuxième voie de l'oscillographe, nous injectons un signal proportionnel à la force excitatrice $E \cos (\omega t + \varphi)$. Il suffit alors de compter le nombre de cycles que décrit l'excitation, entre deux percussions consécutives, pour connaître la valeur de N



4.4.8 Mesure du coefficient de restitution de vitesse R

Par définition, le coefficient de restitution de vitesse R est égal au quotient des valeurs absolues des vitesses du percuteur, respectivement avant et après percussion :

$$R = \left| \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)} \right|$$

Il suffit donc de lire les valeurs de $x'(\tau^+)$ et $x'(\tau^-)$ pour en déduire celle de R.

Cependant, nous avons vu que la perturbation du signal de vitesse impose l'emploi d'un filtre pour mesurer $x'(\tau^+)$, ce qui entraîne une imprécision très sensible de la lecture de $x'(\tau^+)$ (cf photo 4-3).

Par suite, la valeur de R ne peut être connue que très approximativement (R est déterminé à $\pm 10\%$ environ)

CHAPITRE 5

RESULTATS EXPERIMENTAUX ET CYCLES LIMITES

5.1 Généralités

L'étude expérimentale est réalisée, au laboratoire de Mécanique des Structures de l'E.N.S.M., sur le dispositif décrit au chapitre précédent.

Après le réglage de $\frac{x_0}{d}$ à la valeur désirée, nous effectuons un balayage en fréquence (variation de r) en recherchant les percussions régulières (dans les plages où l'accrochage n'est pas automatique, il est provoqué manuellement). Pour ces percussions, nous relevons la valeur de $x'(\tau^-)$, à l'aide du circuit de mesure de la vitesse sans filtre ni pont déphaseur et le nombre de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives.

La valeur de $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0}$ est ensuite calculée comme exposé au chapitre 4.

Pour quelques valeurs des paramètres, nous enregistrons les cycles limites correspondants, c'est-à-dire la représentation expérimentale de la fonction :

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(x) \quad \text{avec } x = g(t)$$

x et x' étant respectivement les déplacement et vitesse du percuteur à l'instant t .

5.2 Présentation et analyse des résultats

Nous présenterons et analyserons les résultats expérimentaux pour chaque valeur numérique de $\frac{x_0}{d}$ retenue au chapitre 3. Soit $\frac{x_0}{d} = -1 / -0,5 / 0,5 / 1 / 2 / 5 / 10$

5.2.1 Plage d'accrochage automatique

- $\frac{x_0}{d}$ négatif

Pour qu'il puisse exister un accrochage automatique, il est nécessaire que l'amplitude E de la force imposée soit supérieure à la force de compression statique du ressort: $k x_0$, ce qui se traduit par :

$$\boxed{\frac{x_0}{d} < -1}$$

- $\frac{x_0}{d}$ positif

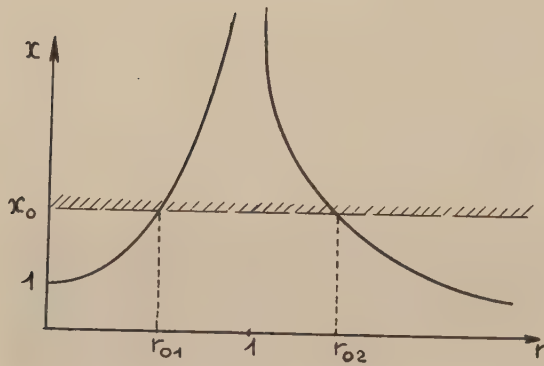


fig. 5-1

L'accrochage automatique n'est réalisable que dans la plage où l'amplitude x_m des oscillations forcées du percuteur est supérieure ou égale à x_0 :

$$x_m = \frac{\varepsilon d}{1-r^2} \geq x_0$$

d'où $r_{01} = \sqrt{1 - \frac{d}{x_0}}$

$$r_{02} = \sqrt{1 + \frac{d}{x_0}}$$

et $r_{01} \leq r \leq r_{02}$

La fig. 5,1 représentant l'amplitude du percuteur en régime forcé met en évidence la plage d'accrochage automatique .

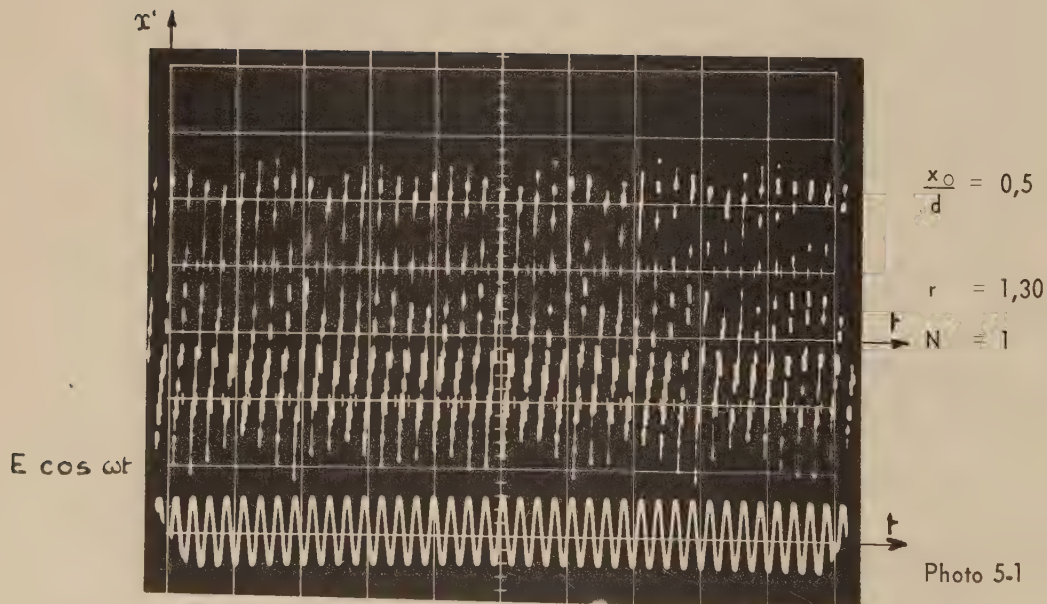
5-2-2 Tableau général des résultats

$\frac{x_0}{d}$	Plage d'accrochage automatique		r	Accrochage	Percussions	N	Photo.	Diag.
	r_{01}	r_{02}						
-1			inférieur à 2,15 $2,15 \leq r \leq 4,25$ $4,25 < r < 5,65$ $5,65 \leq r \leq 6$ $6 < r \leq 10$	manuel manuel impossible manuel impossible	irrégulières quand elles existent régulières sans régulières sans	 1 2	 5-2	
-0,5			inférieur à 2 $2 \leq r \leq 4$ $4 < r < 4,8$ $4,8 \leq r \leq 5,85$ $5,85 < r < 10$	manuel manuel impossible manuel impossible	irrégulières quand elles existent régulières sans régulières sans	 1 2	 5-3	
0,5		1,732	inférieur à 0,8 $0,8 < r < 1,80$ $1,80 < r < 2,75$ $2,75 \leq r \leq 3,40$ $3,4 < r < 4,30$ $4,3 \leq r \leq 4,60$ $4,6 < r < 5,80$ $5,8 \leq r \leq 6,45$	automatique " impossible manuel impossible manuel impossible manuel	irrégulières régulières sans régulières sans régulières sans régulières	 1 2 3 4	 5-4	5-1

$\frac{x_0}{d}$	Plage d'accrochage automatique		r	Accrochage	Percussions	N	Photo.	Diag.
	r ₀₁	r ₀₂						
0,5			6,15 < r < 7,40 7,40 ≤ r ≤ 7,60 7,60 < r < 8,60 8,60 ≤ r ≤ 8,70	impossible manuel impossible manuel	sans régulières sans régulières	5 6	5.5	
1	0	1,414	0,50 ≤ r < 0,70 0,70 ≤ r ≤ 1,70 1,70 < r < 2,80 2,80 ≤ r ≤ 3,10 3,10 < r < 3,95 3,95 ≤ r ≤ 4,20 4,20 ≤ r ≤ 4,95 4,95 < r < 5,35 5,35 ≤ r ≤ 6,45 6,45 < r < 7 7 ≤ r ≤ 7,20 7,20 < r < 7,60 7,60 ≤ r ≤ 8,40 8,40 < r < 9,30 9,30 ≤ r ≤ 9,50 9,50 < r ≤ 10	automatique automatique r ≤ 1,414 manuel r ≥ 1,414 impossible manuel impossible manuel « impossible manuel impossible manuel impossible manuel impossible manuel impossible	irrégulières régulières sans régulières sans régulières « sans régulières sans régulières sans régulières sans régulières sans	N = 1 N = 2 N = 3 N = 4 N = 5 N = 6 N = 7 N = 8	5.7 5.8	5.2
2	0,707	1,225	0,50 < r < 0,70 0,70 ≤ r ≤ 0,80 0,80 < r < 0,84 0,84 ≤ r ≤ 0,96 0,96 ≤ r ≤ 1,55 1,55 < r < 2,015 2,015 ≤ r ≤ 2,60 2,60 < r < 3,05 3,05 ≤ r ≤ 3,60 3,60 < r < 4,05 4,05 ≤ r ≤ 4,50 4,50 < r < 5,30 5,30 ≤ r ≤ 5,45 5,45 < r ≤ 10	manuel automatique pour r > 0,7 automatique automatique automatique pour r < 1,22 impossible manuel impossible manuel impossible manuel impossible manuel impossible	irrégulières régulières irrégulières régulières régulières sans régulières sans régulières sans régulières sans régulières sans	1 2 1 2 3 4 5	5.10	5.3
5	0,894	1,0954	r < 0,9 0,90 ≤ r ≤ 0,91 0,91 ≤ r ≤ 0,94 0,94 < r < 0,96 0,96 ≤ r ≤ 0,98 0,98 ≤ r ≤ 1,40 1,40 < r < 2,05 2,05 ≤ r ≤ 2,25 2,25 < r < 3,25 3,25 ≤ r ≤ 3,30 3,30 < r ≤ 10	impossible automatique « « « automatique pour r ≤ 1,095 impossible manuel impossible manuel impossible	sans régulières régulières irrégulières régulières « sans régulières sans régulières sans	4 3 2 1 2 3	5.12 5.11 5.13	5.4
10	0,949	1,049	r < 0,95 0,95 ≤ r ≤ 0,98 0,98 ≤ r ≤ 1,30 1,30 < r ≤ 10	impossible automatique automatique pour r ≤ 1,05 impossible	sans régulières « sans	8 à 2 1	5.15 5.14	5.5

5. 2. 3. Observations

- $\frac{x_0}{d} = -1$: le phénomène est difficile à obtenir
- $\frac{x_0}{d} = 0,5$ et 1 ; les N multiples ne semblent pas exister lorsque r est inférieur à 2
- $\frac{x_0}{d} = 1$ et 2 ; des percussions régulières sont relevées dans la plage des r compris entre $0,45$ et $0,5$ (cf photos n° 5-6 et 5-9)
- $\frac{x_0}{d} = 10$; les percussions relatives aux N multiples sont impossibles à accrocher dès que r est supérieur à 2
- Pour certaines valeurs de r , les percussions deviennent légèrement instables, quoique régulières (N entier) : un phénomène d'allure sinusoïdale semble se superposer au phénomène stable étudié (cf photo 5-1)

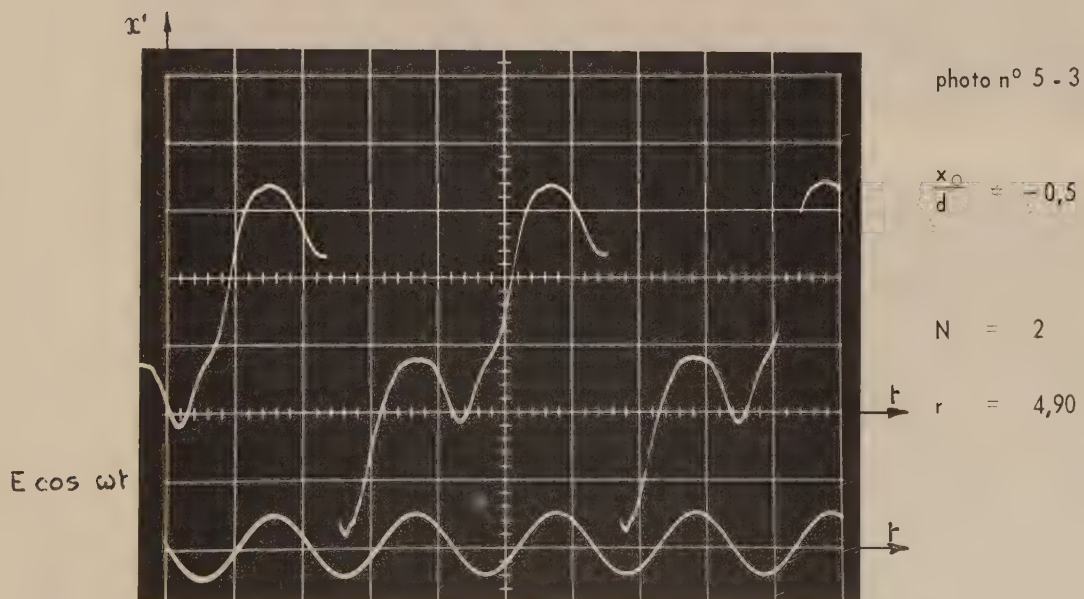
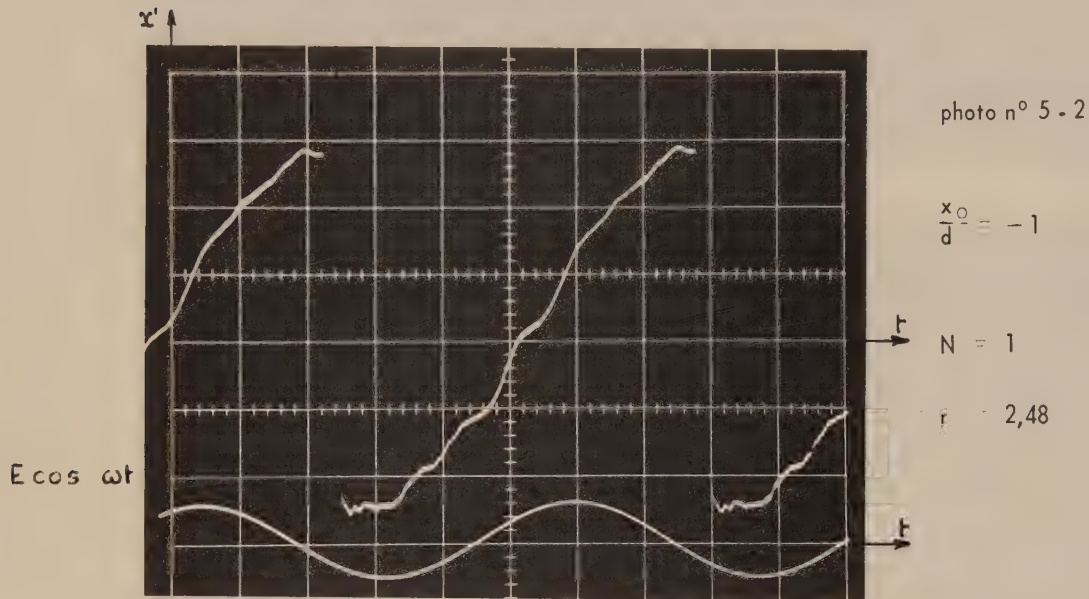


5.2.4. Photographies

Les photographies suivantes, prises à l'aide d'un appareil POLAROID, montrent :

- d'une part, le signal de vitesse en fonction du temps ;
- d'autre part, un signal proportionnel à la force excitatrice : $E \cos (\omega t + \varphi)$

Tous les signaux de vitesse sont photographiés à la sortie du circuit de mesure muni du filtre double T.



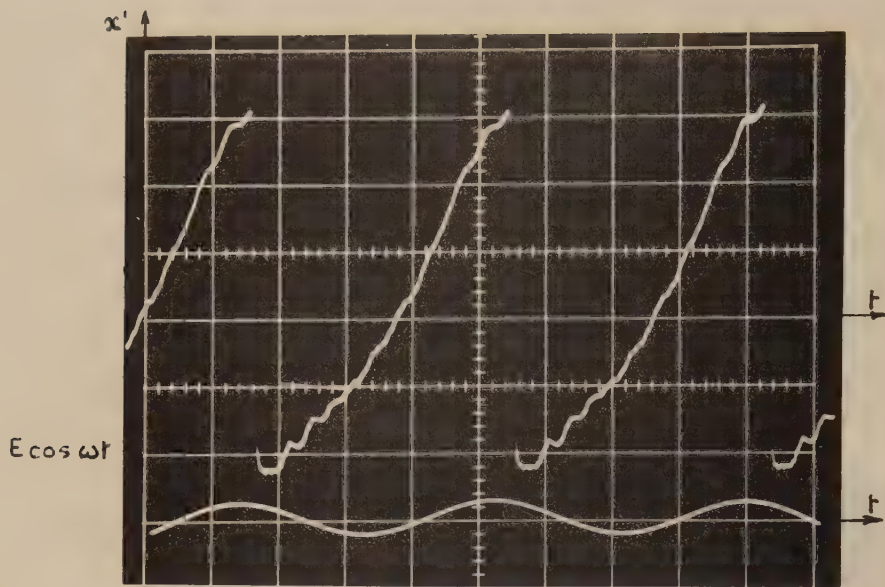


photo n° 5 - 4

$$\frac{x_0}{d} = 0,5$$

$$N = 1$$

$$r = 0,87$$

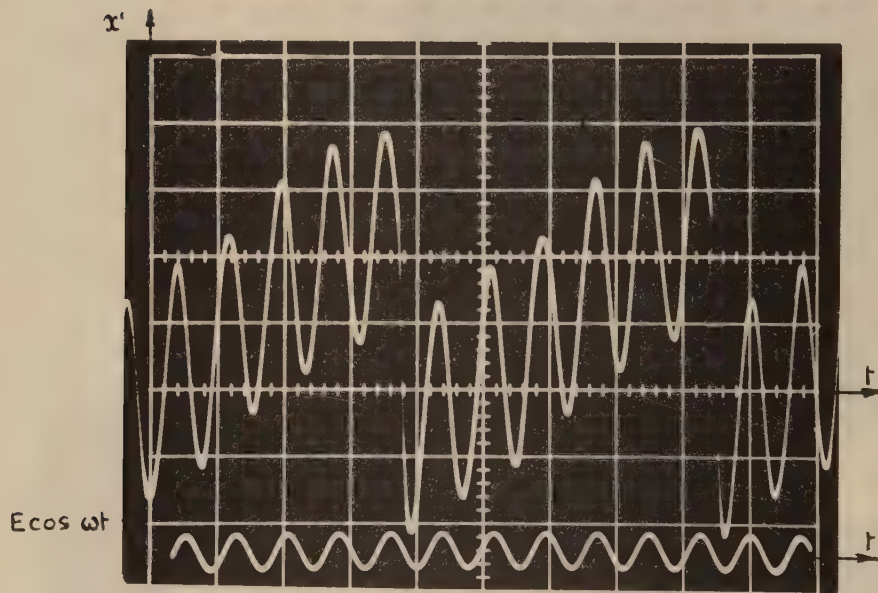


photo n° 5 - 5

$$\frac{x_0}{d} = 0,5$$

$$N = 6$$

$$r = 8,68$$

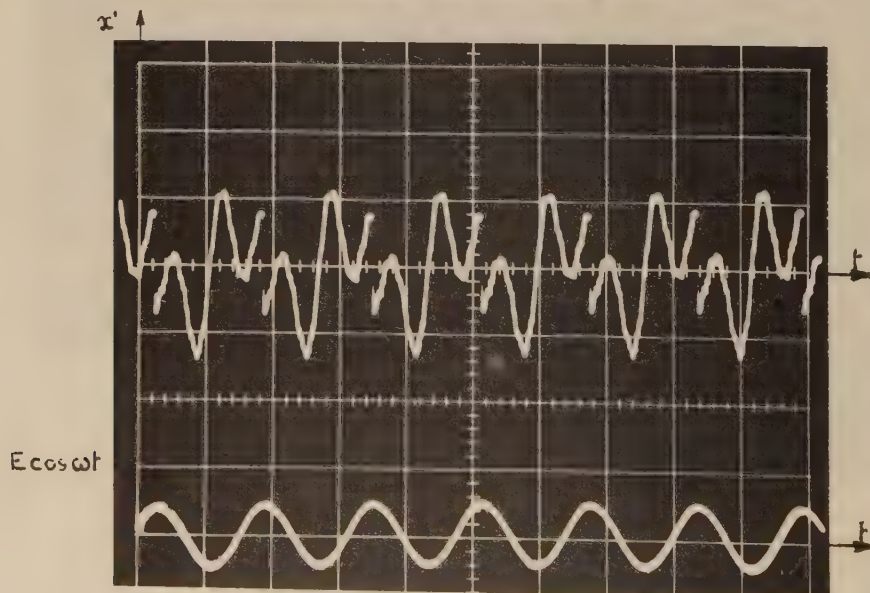
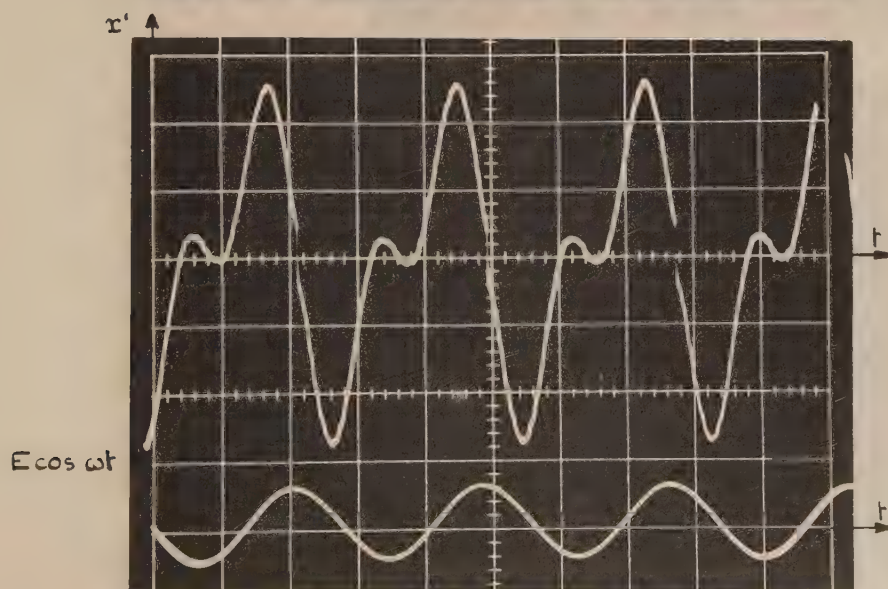
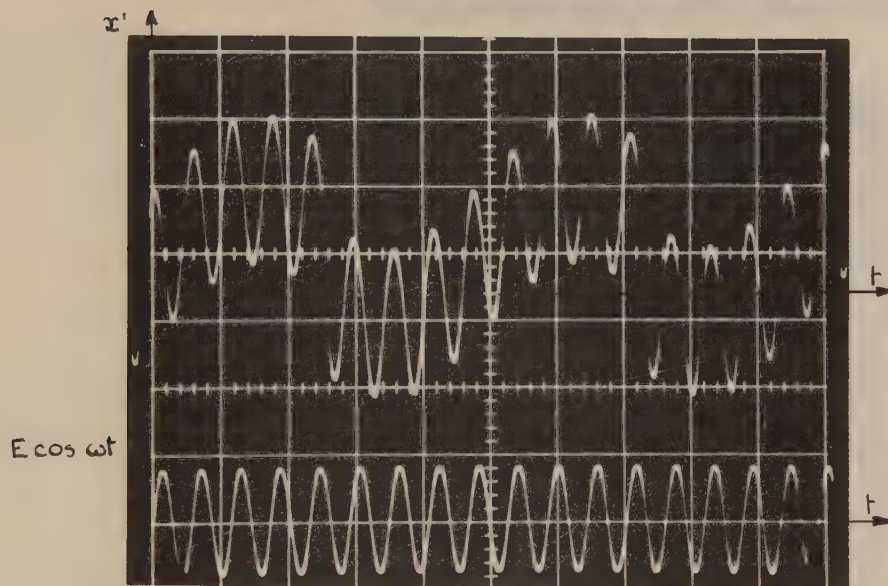
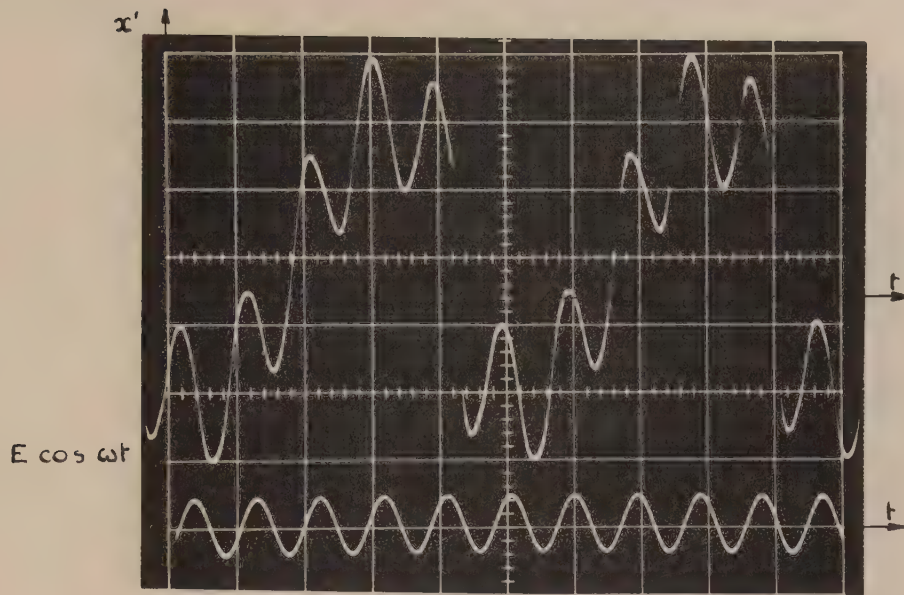


photo n° 5 - 6

$$\frac{x_0}{d} = 1$$

$$N = 1$$

$$r = 0,41$$



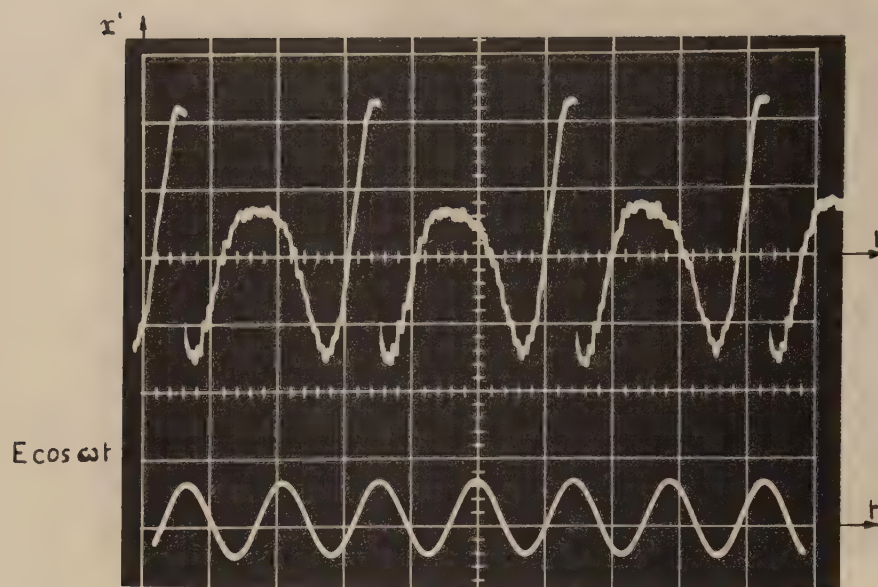


photo n° 5 - 10

$$\frac{x_0}{d} = 2$$

$$N = 2$$

$$r = 0,93$$

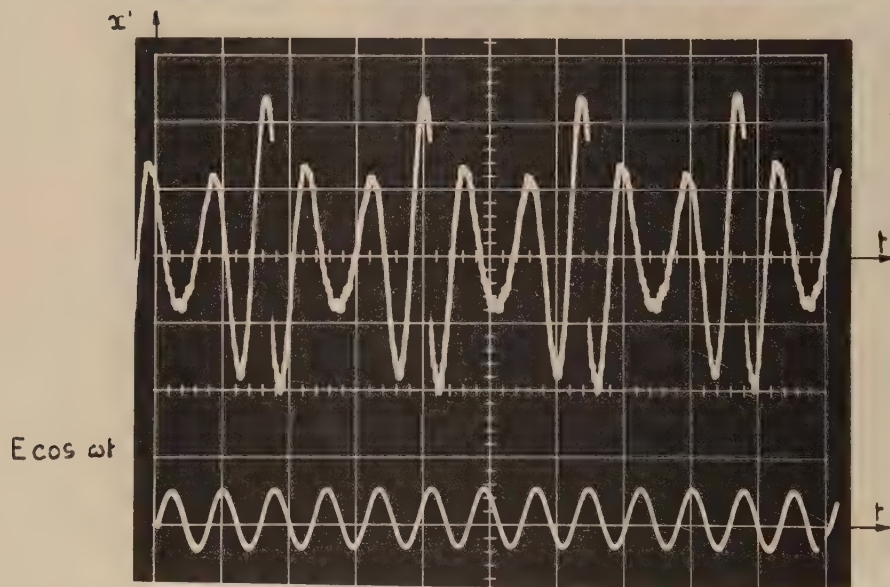


photo n° 5 - 11

$$\frac{x_0}{d} = 5$$

$$N = 3$$

$$r = 0,92$$

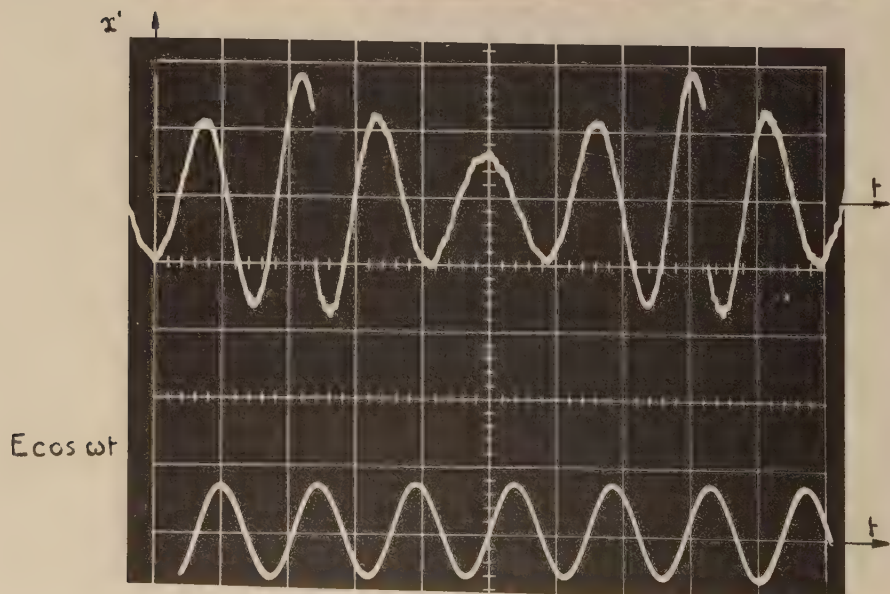


photo n° 5 - 12

$$\frac{x_0}{d} = 5$$

$$N = 4$$

$$r = 0,907$$

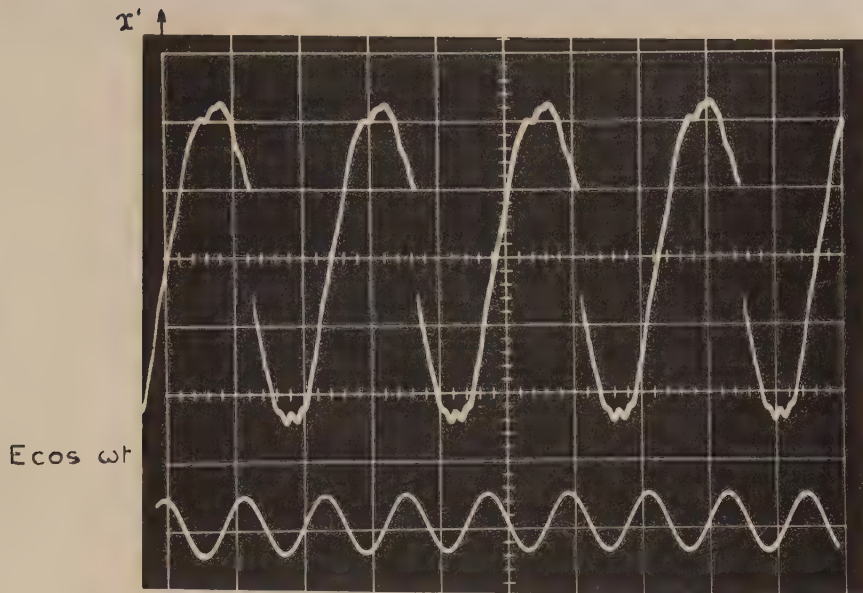


photo n° 5 - 13

$$\frac{x_0}{d} = 5$$

$$N = 2$$

$$r = 2,23$$

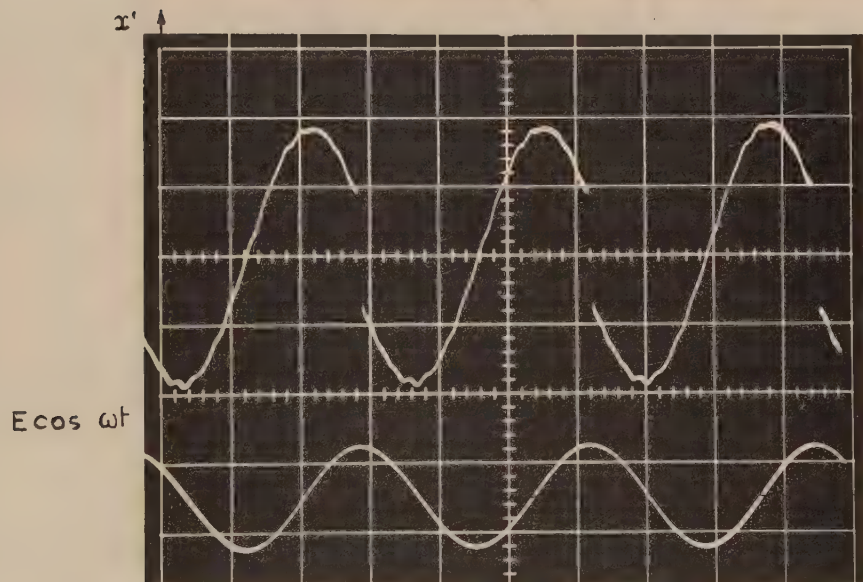


photo n° 5 - 14

$$\frac{x_0}{d} = 10$$

$$N = 1$$

$$r = 1,01$$

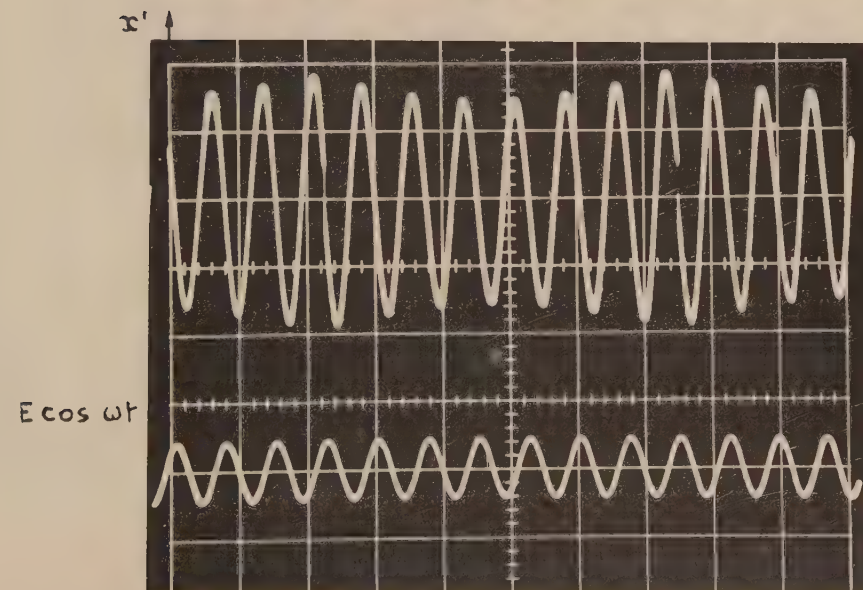
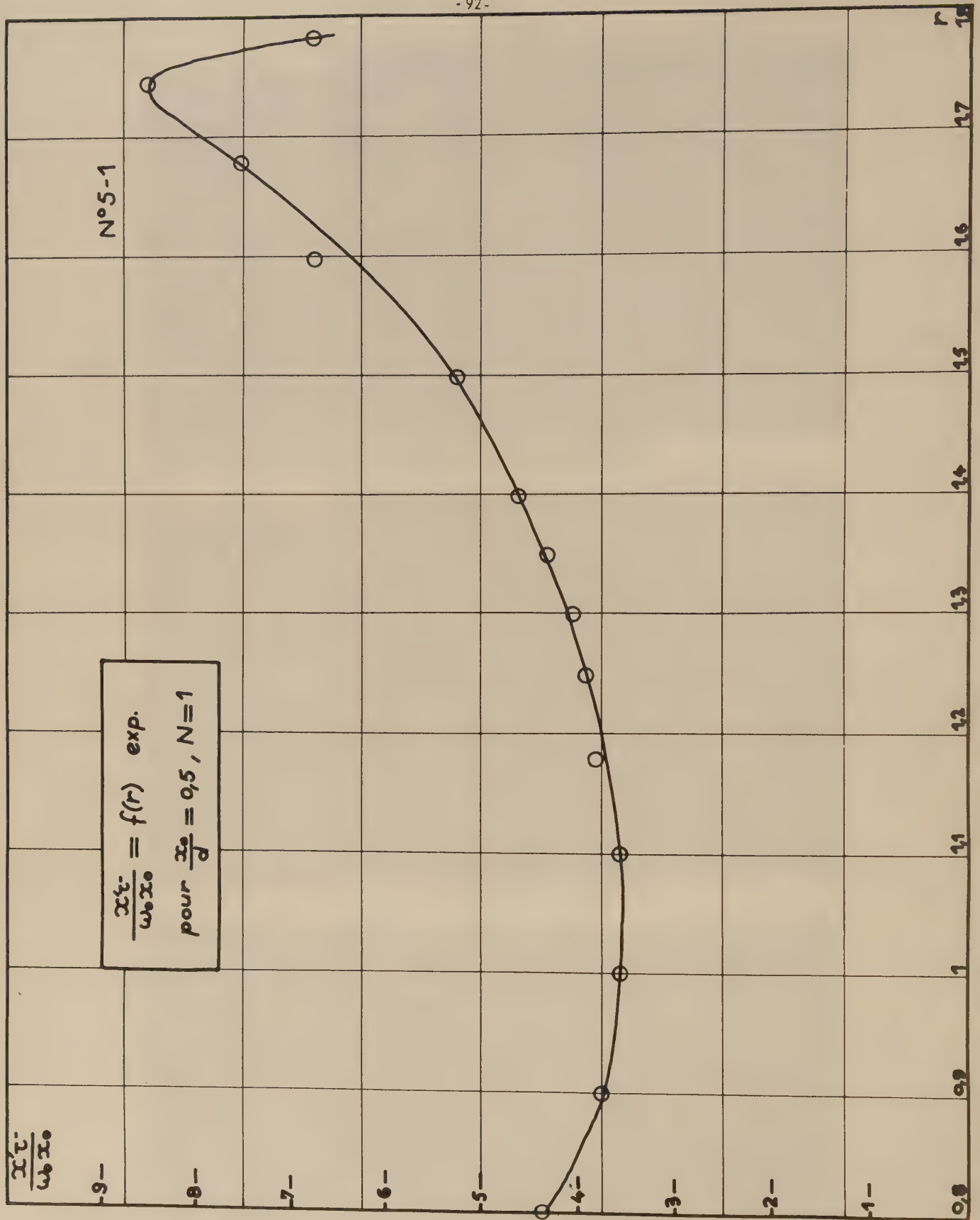


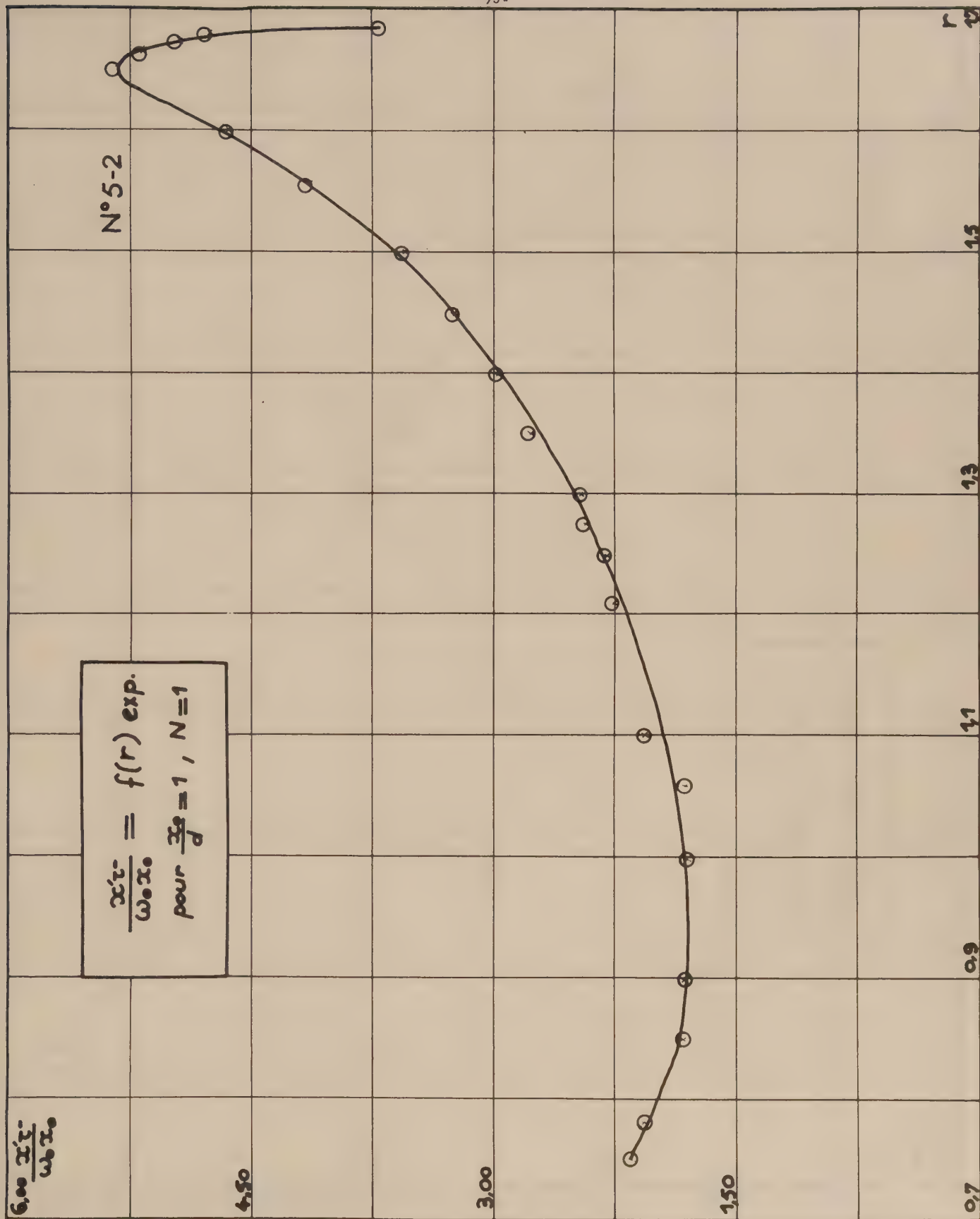
photo n° 5 - 15

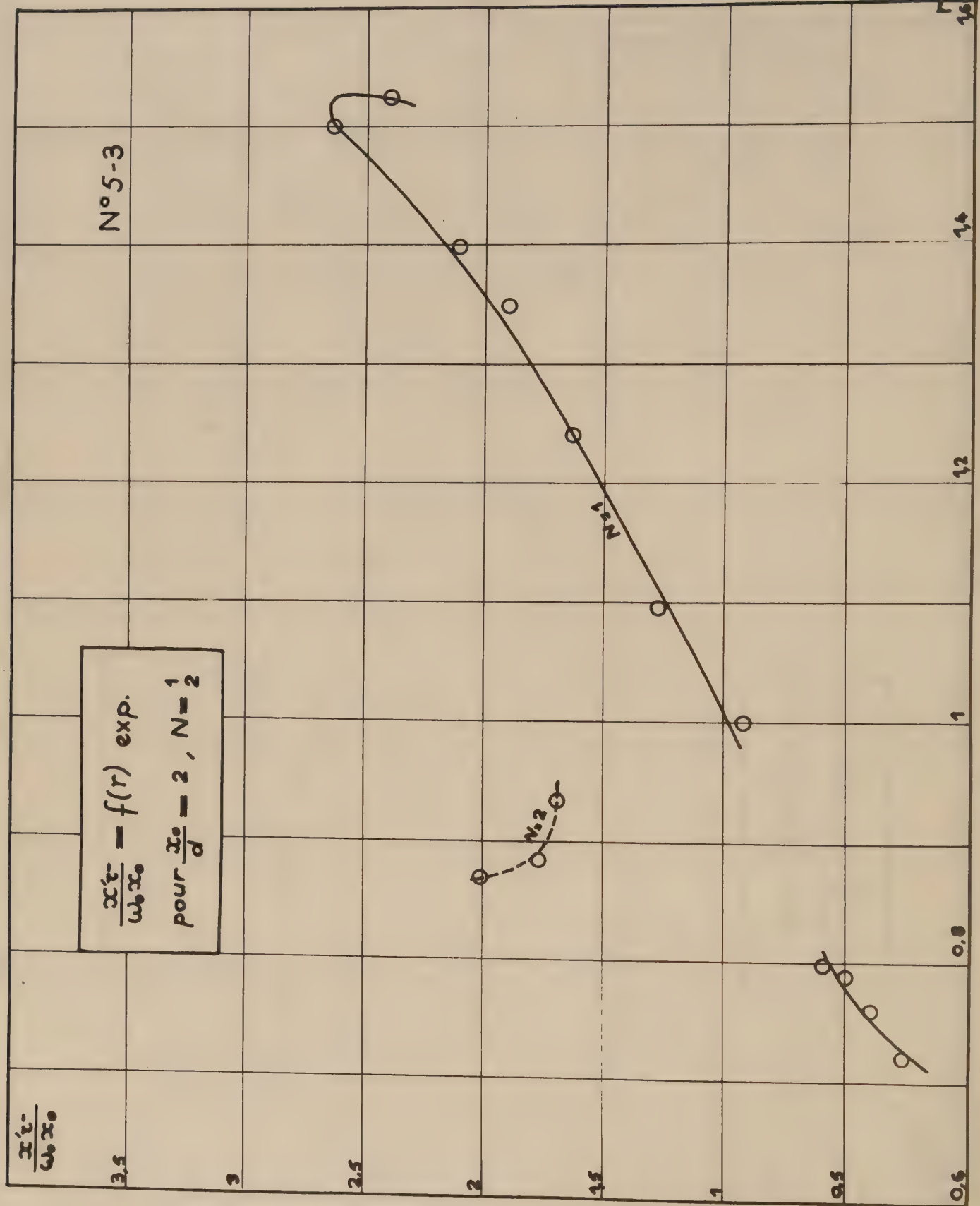
$$\frac{x_0}{d} = 10$$

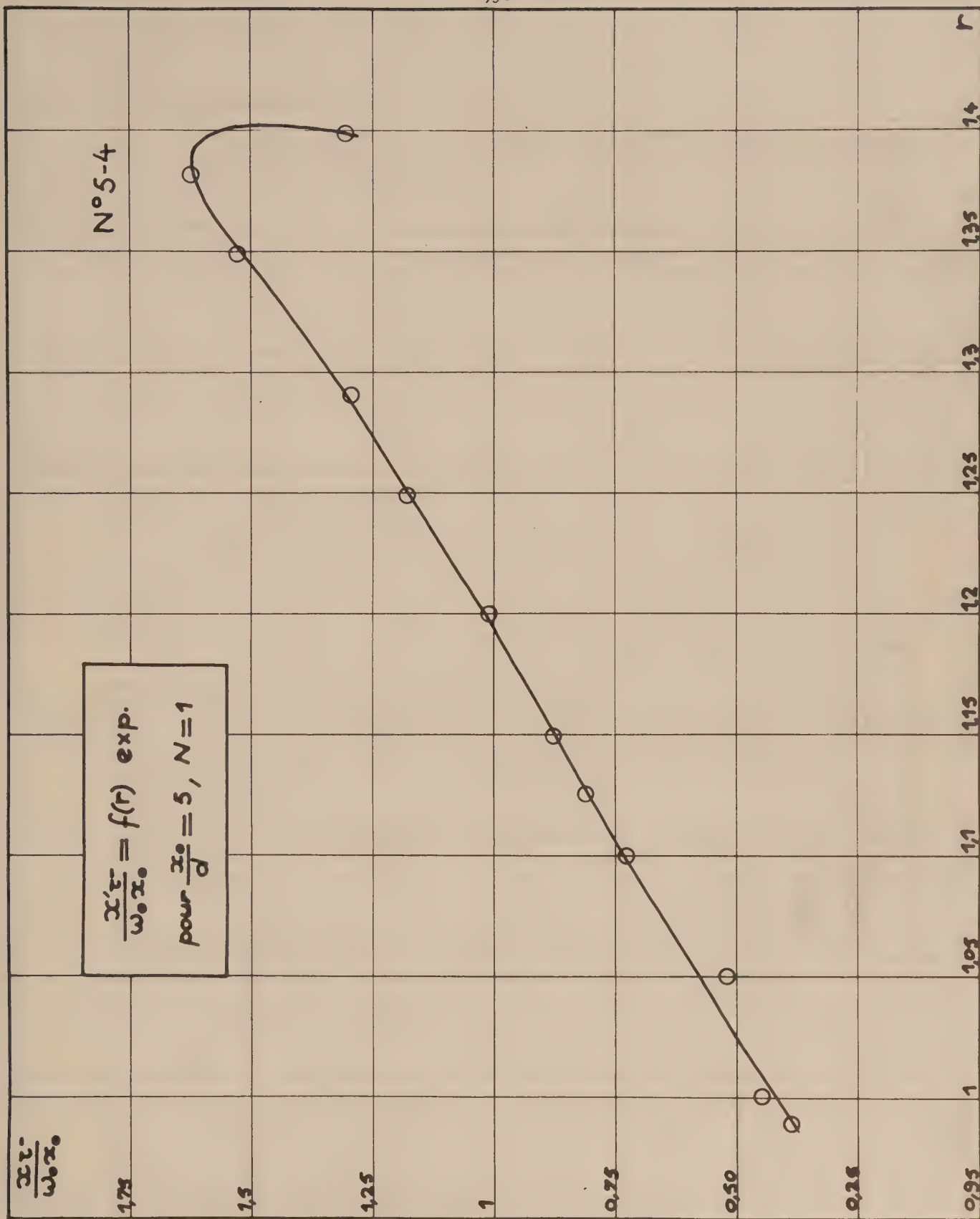
$$N = 7$$

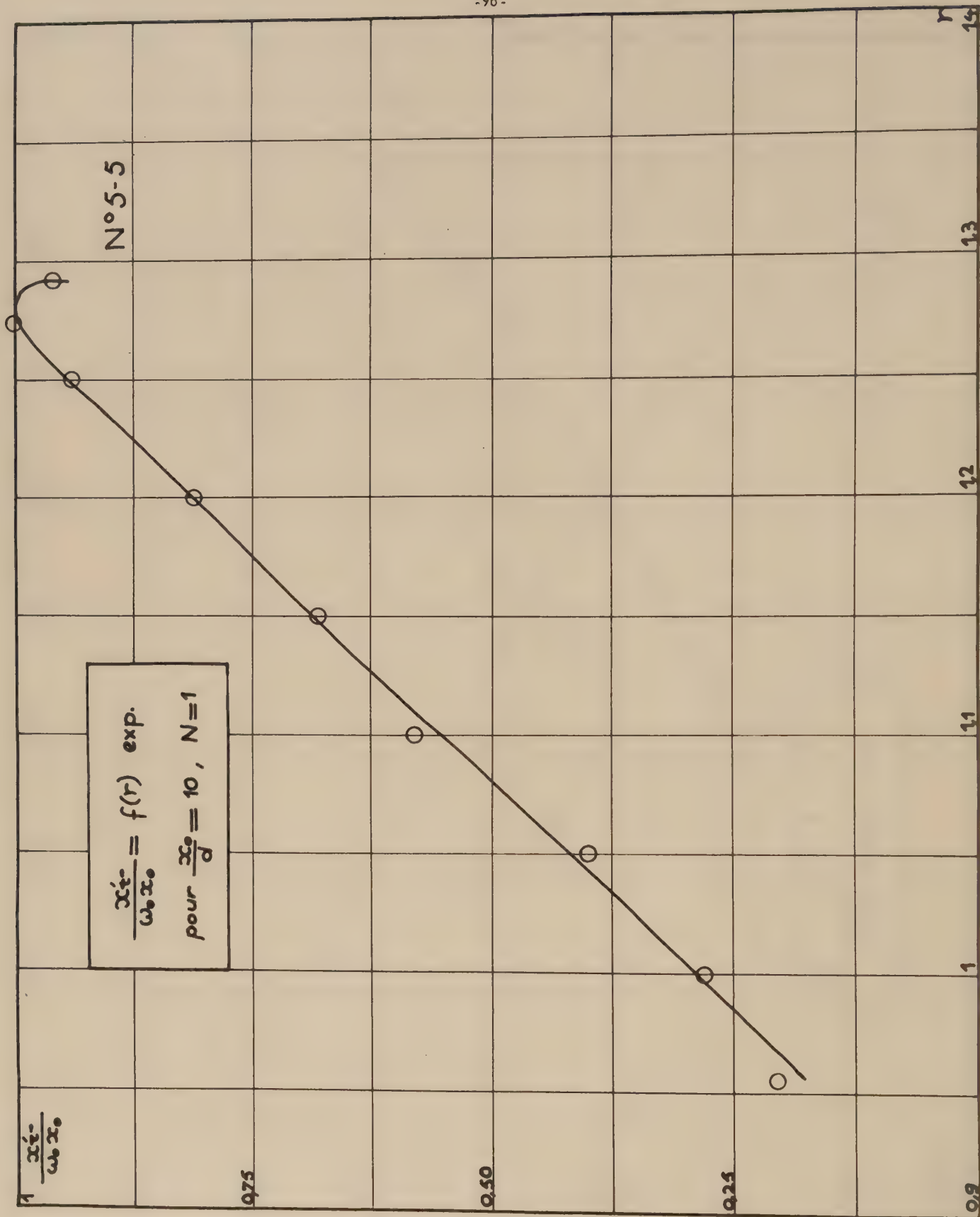
$$r = 9,29$$











5. 2. 5 Diagrammes

Les graphes de la fonction expérimentale $\frac{x'(T)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ ne sont tracés que pour les plages où la variation de r est sensible :

$$\frac{x_0}{d} = 0,5 \quad 0,8 \leq r \leq 1,8 \quad \text{diagramme n° 5-1}$$

$$\frac{x_0}{d} = 1 \quad 0,7 \leq r \leq 1,7 \quad \text{« n° 5-2}$$

$$\frac{x_0}{d} = 2 \quad 0,6 \leq r \leq 1,6 \quad \text{« n° 5-3}$$

$$\frac{x_0}{d} = 5 \quad 0,95 \leq r \leq 1,45 \quad \text{« n° 5-4}$$

$$\frac{x_0}{d} = 10 \quad 0,9 \leq r \leq 1,4 \quad \text{« n° 5-5}$$

La comparaison des graphes théoriques et expérimentaux nécessite la connaissance du coefficient de restitution de vitesse R . Or, la valeur de celui-ci ne peut être déterminée avec précision (cf chapitre 4 par. 4-8). R est compris entre 0,60 et 0,75.

Il ressort de cette comparaison des graphes que la valeur expérimentale $r = r_d$ de décrochement pour $\frac{x_0}{d}$ constant, semble sensiblement plus faible que celle déduite de la théorie. La différence enregistrée est due :

- d'une part à ce que l'étude théorique suppose un amortissement nul. En réalité, le coefficient d'amortissement μ du système est de 1/100 environ, ce qui réduit légèrement la valeur $r = r_d$ de décrochement (cf chapitre 3 par. 4-4) ;

- d'autre part, au réglage de $\frac{x_0}{d}$; ce réglage, théoriquement aisé est, en fait, très délicat : il suffit, en effet, d'une impulsion très légère transmise au percuteur pour que l'accrochage ait lieu, dès que la valeur de $\frac{x_0}{d}$ est proche de celle désirée.

De plus, la valeur réelle d'accrochage $r = r_0$ n'est pas

$$r_0 = \sqrt{1 + \frac{d}{x_0}}$$

cette relation n'étant applicable que pour un amortissement nul, mais $r = r_a$ tel que :

$$\frac{\frac{d}{x_0}}{\sqrt{(1-r_a^2)^2 + 4\mu^2 r_a^2}} = 1$$

Soit :

$$(1 - r_a^2)^2 + 4 \mu^2 r^2 = \left(\frac{d}{x_0}\right)^2$$

ou encore :

$$r_a^4 + 2 r_a^2 (2 \mu^2 - 1) + 1 - \left(\frac{d}{x_0}\right)^2 = 0$$

dont les solutions sont :

$$r_a^2 = 1 - 2 \mu^2 + \varepsilon \sqrt{(2 \mu^2 - 1)^2 - 1 + \left(\frac{d}{x_0}\right)^2} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

Il vient, en prenant la détermination positive correspondant à r supérieur à 1 :

$$r_a = \sqrt{1 - 2 \mu^2 + \sqrt{(2 \mu^2 - 1)^2 - 1 + \left(\frac{d}{x_0}\right)^2}}$$

Les écarts entre les valeurs théorique et expérimentale de $\frac{x'(T^*)}{\omega_0 x_0}$, pour r fixe, proviennent à la fois de l'erreur commise au réglage de $\frac{x_0}{d}$ et de l'imprécision de lecture due aux mesures réalisées à l'oscilloscope ($\pm 10\%$ d'écart, en moyenne)

5.3 Conclusion

L'étude expérimentale réalisée met en évidence les caractéristiques suivantes :

5.3.1 Les percussions sont régulières (identiques entre elles) dès que le nombre de cycles de l'excitation, entre deux percussions consécutives, est un entier.

5.3.2 Le phénomène de résonance n'existe plus lors des percussions.

5.3.3 Le phénomène vibratoire étudié, avec percussion, est un phénomène non linéaire.

Les cycles décrits au chapitre 3, par. 3-4-4 sont parfaitement confirmés (zone d'accrochage automatique ou non ; nécessité, pour r supérieur à 2, d'un accrochage automatique)

5.3.4 Pour $\frac{x_0}{d}$ positif, la valeur $r = r_a$ de décrochement croît avec $\frac{x_0}{d}$

5.3.5 Pour $\frac{x_0}{d}$ positif, la vitesse de percussion croît quand x_0 croît

5.3.6 Pour $\frac{x_0}{d}$ positif (0,5/1/2/5/10)

- seul le cas $N = 1$ existe quand r varie de 1 à 2

- N multiple apparaît :

- pour r supérieur à 2 quand $\frac{x_0}{d} = 0,5/1/2/5$

- pour r inférieur à 1 quand $\frac{x_0}{d} = 2/5/10$

- Plus $\frac{x_0}{d}$ croît, plus il est aisé d'accrocher les N multiples pour r inférieur à 1 et inversement, plus $\frac{x_0}{d}$ décroît, plus il est facile d'accrocher les N multiples pour r supérieur à 2.

5.3.7 La valeur $r = r_m$ correspondant à la vitesse de percussion maximum, pour $\frac{x_0}{d}$ fixe et positif, est très voisine de celle $r = r_d$ de décrochement et se situe toujours dans une plage où l'accrochage n'est pas automatique.

La comparaison des études théorique et expérimentale montre que celles-ci sont concordantes. Les caractéristiques expérimentales du système vibrant à un degré de liberté, avec déplacement limité d'un seul côté, confirment celles dégagées de la théorie.

5-4 Cycles limites

5-4-1 Généralités

Un cycle limite se définit comme étant, pour un mouvement périodique donné, le graphe de la fonction :

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{avec} \quad x = g(t)$$

où

$$\begin{cases} x : \text{déplacement à l'instant } t \\ x' : \text{vitesse à l'instant } t \\ t : \text{temps} \end{cases}$$

Cette notion est intéressante pour les phénomènes vibratoires non linéaires, à la fois périodiques et stables.

Pour un mouvement sinusoïdal en régime permanent, les cycles limites sont des ellipses de Lissajoux.

5-4-2 Réalisation des cycles limites :

Pour tracer un cycle limite, il est nécessaire, à tout instant, de connaître simultanément la vitesse x' et le déplacement x .

Expérimentalement, nous réaliserons les cycles limites, en intégrant, point par point, le signal vitesse, en utilisant l'intégrateur décrit au chapitre 4 (cf fig. 5.2)

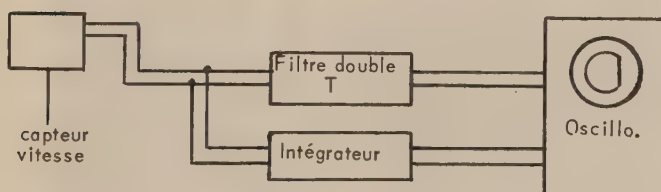
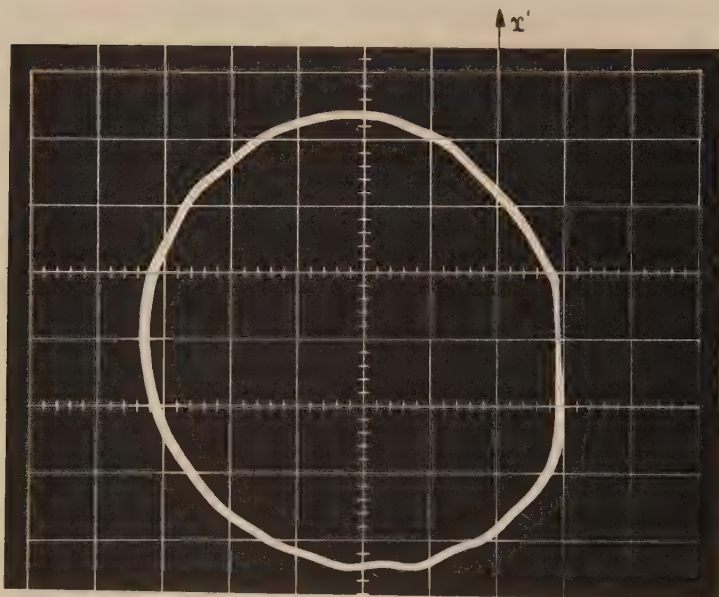


fig. 5.2

5 - 4 - 3 Résultats

Pour le système à un-degré de liberté, avec déplacement limité d'un seul côté, nous obtenons trois types de cycles limites, suivant le nombre N de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives et la valeur de r :

- 1^{er} type : $N = 1$ (cf photo 5 - 16)
 2^{ème} type : $N > 1$ et $r < 1$ (cf photos 5-17 et 5-18)
 3^{ème} type : $N < 1$ et $r > 2$ (cf photos 5-19 et 5-20)



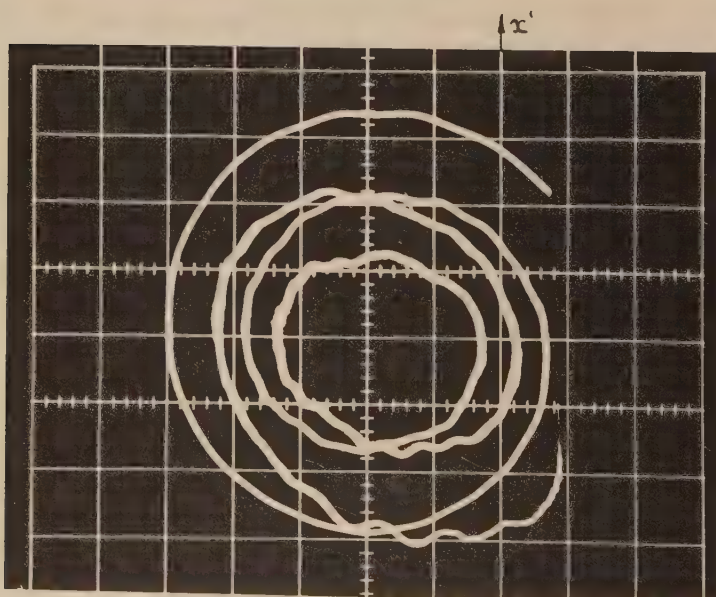
$$\frac{x_0}{d} = 10$$

$$r = 1,06$$

$$N = 1$$

1^{er} type

photo n° 5-16



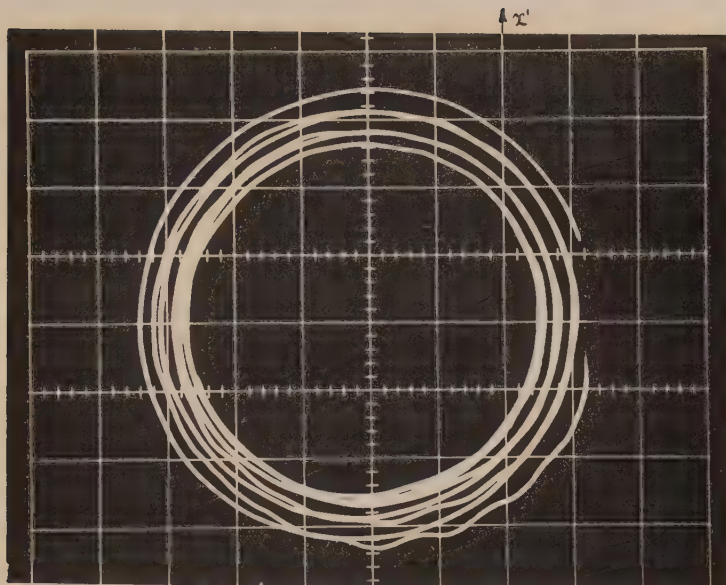
$$\frac{x_0}{d} = 5$$

$$r = 0,90$$

$$N = 4$$

2^{ème} type

photo n° 5 - 17



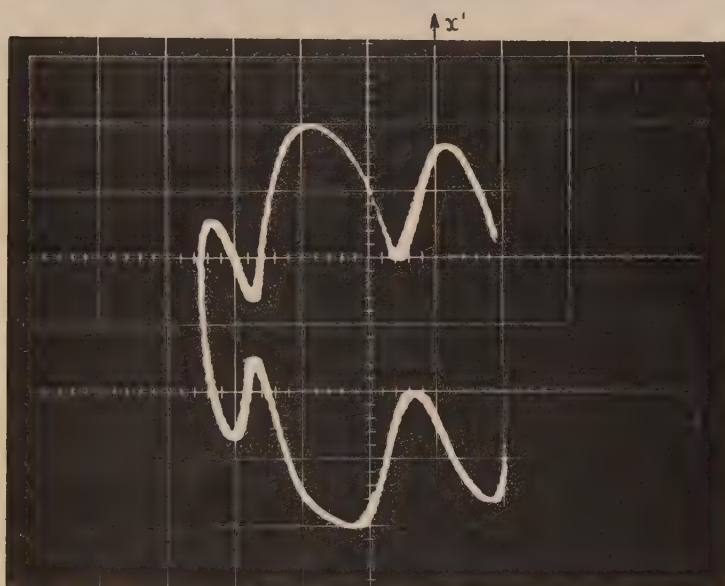
$$\frac{x_0}{d} = 10$$

$$r = 0,93$$

$$N = 7$$

2ème type

photo n° 5 - 18



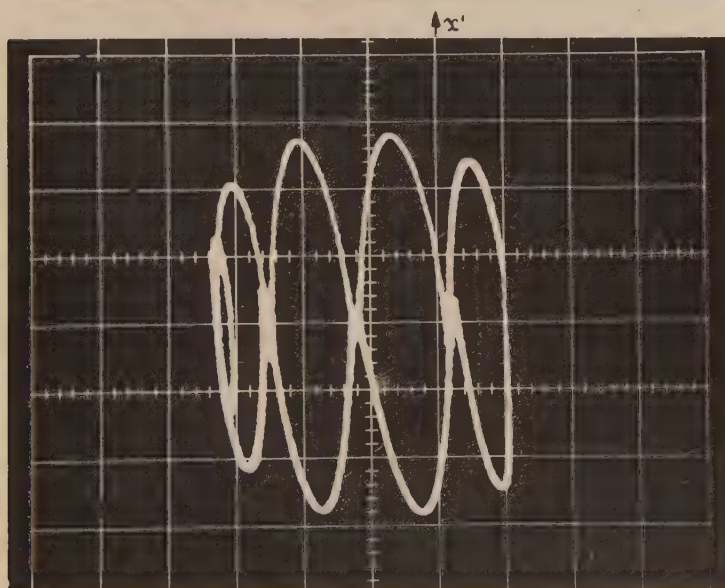
$$\frac{x_0}{d} = 1$$

$$r = 5,89$$

$$N = 5$$

3ème type

photo n° 5 - 19



$$\frac{x_0}{d} = 1$$

$$r = 9,44$$

$$N = 8$$

3ème type

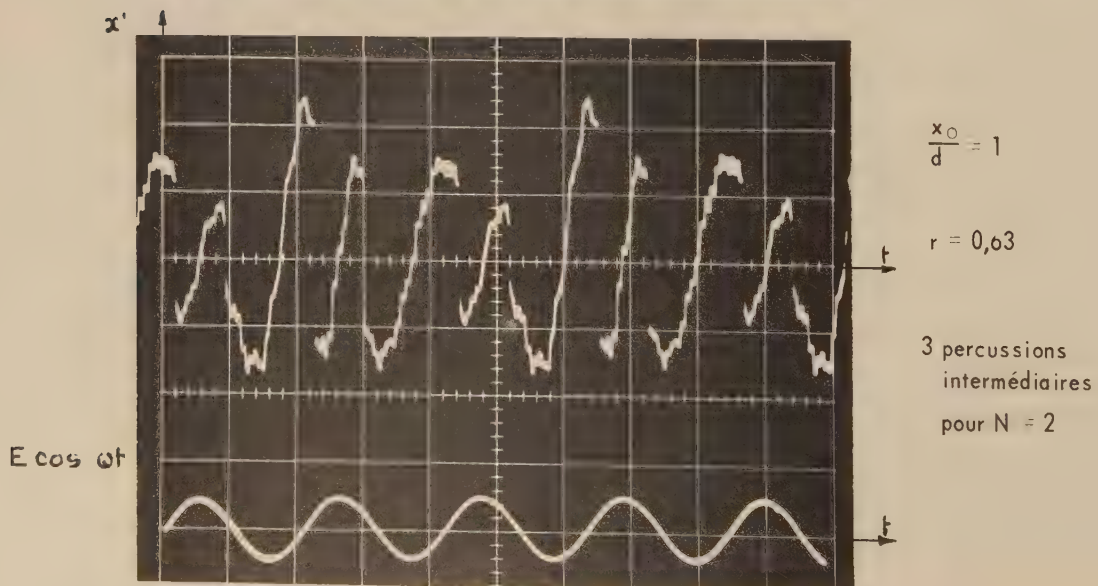
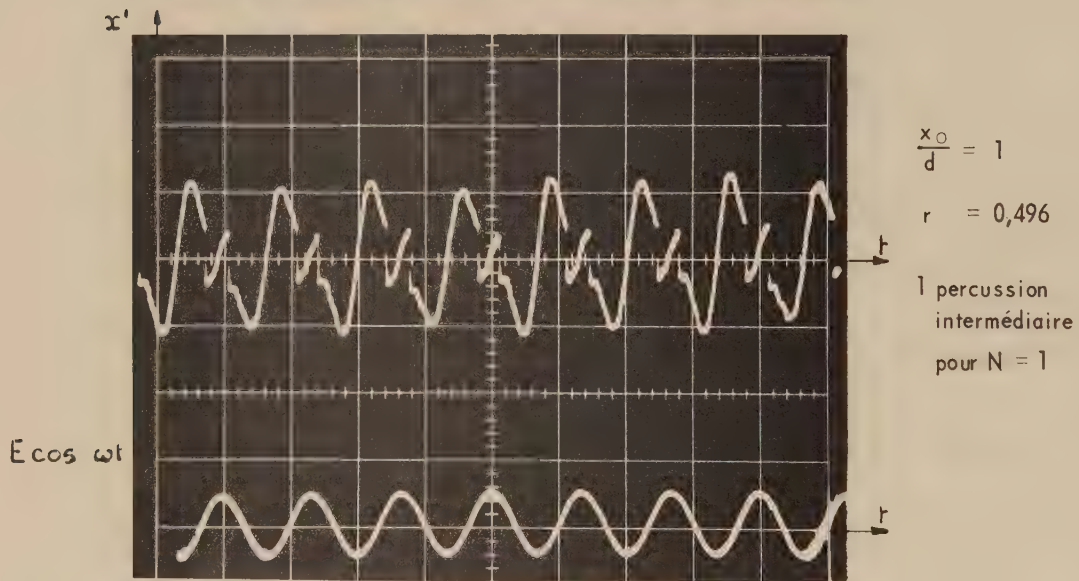
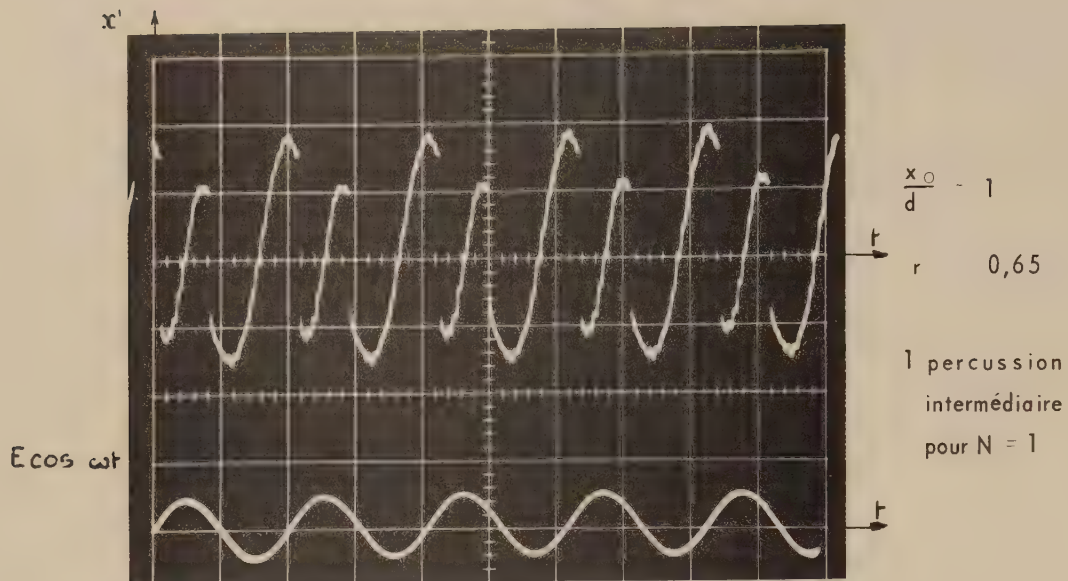
photo n° 5 - 20

CONCLUSION

L'étude, tant théorique qu'expérimentale, des vibrations forcées, avec déplacement limité d'un seul côté, d'un système à un degré de liberté soumis à une excitation sinusoïdale, nous a permis de mettre en évidence les caractéristiques régissant le phénomène. Nous retiendrons particulièrement :

- Le mouvement n'est régulier que si, et seulement si, le nombre de cycles décrits par l'excitation, entre deux percussions consécutives, est un entier.
- La percussion transforme un phénomène vibratoire linéaire en phénomène non linéaire.
- Le phénomène de résonance des systèmes vibrants à un degré de liberté n'existe plus lors de percussions.
- Le maximum de la vitesse de percussion, pour un système non ou faiblement amorti, se situe toujours dans une zone de fréquences d'excitation où l'accrochage n'est pas automatique.
- L'amortissement réduit très sensiblement les zones de fréquences d'excitation où les percussions sont régulières.
- Pour un niveau d'énergie constant fourni au système, la vitesse de percussion dépend de la fréquence d'excitation, de la distance percuteur-butée (ou interstice réel) et du coefficient de restitution de vitesse.

L'étude réalisée a été limitée aux mouvements périodiques et réguliers. Il existe cependant d'autres mouvements périodiques, dont les percussions successives ne sont pas identiques, comme ceux illustrés par les photos ci-après.



L'utilisation d'un système à un degré de liberté pour le battage des pieux et palplanches présente certains inconvénients : des efforts dynamiques très importants, développés lors des percussions, sont transmis à tous les organes de l'appareil (et notamment au moteur) d'où il s'ensuit une détérioration rapide. Aussi, est-il plus judicieux d'employer un système à deux degrés de liberté.

Nous poursuivons actuellement des recherches sur ce système à deux degrés de liberté dans le but, tout d'abord, d'exprimer la vitesse de percussion en fonction des caractéristiques mécaniques (raideurs des ressorts, interstice réel, etc...) pour des butées fixes, puis de préciser l'influence du mouvement d'ensemble (butée - vibrofonceur), de l'amortissement dû au sol, du retour de l'onde de choc, etc..., pour des butées mobiles (pieux, palplanches)

÷

: ÷

÷

A N N E X E

APPLICATION DES RESULTATS THEORIQUES A UN VIBROFONCEUR POSSEDANT UN SEUL DEGRE DE LIBERTE

1 - Généralités

L'utilisation du système vibrant à un degré de liberté, avec déplacement limité d'un seul côté, comme vibrofonceur, implique la recherche du rendement maximum de l'appareil et l'utilisation d'une excitation par balourds.

2 - Rendement maximum

L'énergie transmise à la butée s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m x'^2(\tau^-) - \frac{1}{2} m x'^2(\tau^+)$$

Or : $x'(\tau^+) = -R x'(\tau^-)$

d'où :

$$T = \frac{1}{2} m (1 - R^2) x'^2(\tau^-)$$

avec :

m : masse du percuteur

R : coefficient de restitution de vitesse, constant pour une butée fixe.

$x'(\tau^-)$: vitesse de percussion

Par suite :

« Le rendement maximum d'un appareil avec butée fixe et niveau d'énergie constant est atteint pour la vitesse de percussion optimum. »

3 - Excitation par balourds

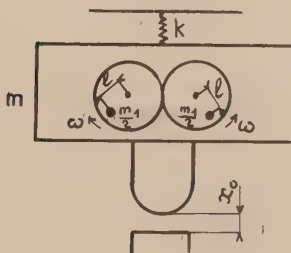


fig. A-1

L'excitation par balourds est réalisée par deux disques tournant en sens inverse, à la vitesse angulaire ω , et portant deux masses $\frac{m_1}{2}$ excentrées de la distance l (cf fig. A-1).

La force excitatrice est ainsi verticale et sinusoïdale. Pour un système non amorti, l'équation du mouvement

devient :

$$m\ddot{x} + kx = m_1 \ell^2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

L'expression de la vitesse réduite de percussion est déduite de l'expression générale

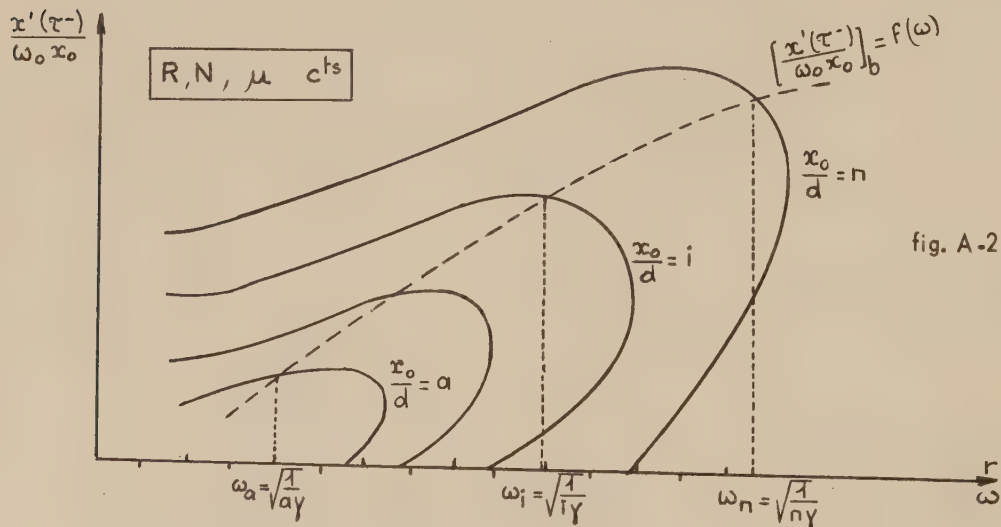
[1-4-4-7] en remplaçant $\frac{d}{x_0}$ par $\frac{m_1 \ell^2 \omega^2}{k x_0}$

$$\left[\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} \right]_b = \frac{2 \operatorname{tg} \psi \left[1 + R + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{m_1 \ell^2 \omega^2 / k x_0}{1 - r^2} \right)^2 \left[\left(\frac{1+R}{2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-R}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right] - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-R}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \right]}{(1+R)^2 + \frac{1}{r^2} (1-R)^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \quad [1]$$

L'exploitation d'une telle relation impose la connaissance de la pulsation ω et, par suite, n'est applicable qu'à un appareil déterminé.

4 - Tracé des graphes de la fonction $\left[\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} \right]_b = f(\omega)$ d'un appareil à excitation par balourds à partir des graphes de la fonction $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ du système à excitation par force sinusoïdale d'amplitude constante.

Portons, sur un même diagramme (fig. A-2), les graphes théoriques $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ à N, R et μ constants et $\frac{x_0}{d} = a, b, \dots, i, \dots, n$ (cf. chapitre 3)



Pour un appareil déterminé, excité par balourds, m_1, ω_0, ℓ sont des constantes connues.

Remplaçons l'échelle des r par celle des ω à l'aide de la relation $r = \frac{\omega}{\omega_0}$

A chaque valeur de $\frac{x_0}{d} = i$, correspond une valeur $\omega = \omega_i$, telle que :

$$\frac{d}{x_0} = \frac{1}{i} = \gamma \omega_i^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{m_1 \ell^2}{k x_0}$$

$$\text{d'où } \omega_i = \sqrt{\frac{1}{i \gamma}} \quad [2]$$

Pour cette valeur de ω_i , les vitesses réduites de percussion - si elles existent - des systèmes excités par « force sinusoïdale d'amplitude constante » et par « balourds » sont égales.

Il est donc aisé de tracer point par point le graphe de la fonction $\left[\frac{x'(t)}{\omega_0 x_0} \right]_b = f(\omega)$ à partir des graphes $\frac{x'(t)}{\omega_0 x_0} = f(r)$ (cf fig. A-2) en appliquant à chaque valeur de $\frac{x_0}{d}$ la relation [2].

L'intérêt de cette méthode réside dans l'utilisation de réseaux de courbes dont les différentes variables sont sans dimension pour calculer les caractéristiques d'un appareil déterminé, même excité par balourds.

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \quad \div \\ \div \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

- Y. PIRONNEAU Mécanique des Vibrations
E.N.S.M. NANTES
- D.D. BARKAN Méthodes de vibration dans la construction
DUNOD Ed.
- CH. HAYASHI Non - linear oscillations in physical systems
Mc Graw-Hill Electrical and Electronic
Engineering Series
- J.A. SPARENBERG Oscillator with an amplitude bouded at one side
Laboratorium voor Toegepaste
Mechanica der Technische Hogeschool
DELFT, NETHERLANDS

÷
÷ ÷
÷

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

**ETUDE DES PLANS DE GLISSEMENT DANS LES SOLS
EN EQUILIBRE LIMITE
PAR LA METHODE DE SOKOLOVSKY**

VU

Le Directeur de Thèse

Y. PIRONNEAU

VU et APPROUVE

NANTES, le 16 juin 1967

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU

Le Président du Jury

Y. PIRONNEAU

G. BRILLOUET

VU et PERMIS d'IMPRIMER

NANTES, le 16 juin 1967

*Le Recteur de l'Académie de Nantes
Président du Conseil de l'Université*

M. SCHMITT

